

Mouvement axisymétrique dans l'essai de compression cisailante pour un matériau viscoplastique

Résumé

L'étude réalisée dans ce travail vise à mieux comprendre l'essai de compression cisailante encore appelé "squeeze flow" pour un matériau viscoplastique. Dans cette technique, même si les essais sont relativement simples à mettre en œuvre, le matériau est soumis à une cinématique de déformation complexe qui est un mélange de cisaillement et d'élongation. Dans une telle cinématique, le comportement ne peut être déduit directement, il faut présupposer une loi de comportement et l'identifier par méthode inverse. Les derniers résultats numériques avec ce type de matériau montrent l'invalidité de l'approximation de lubrification, qui suppose qu'on a affaire à un simple cisaillement sans aucune contrainte normale, notamment pour prédire la forme de la surface seuil. En effet, d'après cette théorie la surface seuil existe dans tout l'échantillon et que toutes les tranches du matériau situées sur les deux axes de symétrie sont rigides, et d'après ces derniers résultats numériques les zones rigides si finalement elles existent, elles ne peuvent se localiser que dans des régions très restreintes situées dans les coins de l'échantillon. Dans tous les cas, la question sur l'existence ou non des zones rigides dans le mouvement reste toujours posée qu'il soit dans ce problème ou dans d'autres problèmes complexes. Les moyens utilisés par les solutions numériques pour caractériser les zones rigides sont des fois très approchés pour conclure d'une manière définitive sur la question. Nous avons alors entrepris cette étude avec des moyens théoriques en cherchant des solutions analytiques asymptotiques. Nous avons considéré le cas des mouvements à très faibles vitesses où les contraintes mises en jeu sont très proches du plateau plastique afin de se mettre dans les conditions les plus favorables pour mieux se prononcer sur l'existence ou non des zones rigides. Dans ces conditions deux solutions analytiques simples ont été obtenues, la solution interne et la solution externe. La solution interne est supposée valable près des deux axes de symétrie de l'échantillon et au-delà c'est la solution externe qui est supposée valable. Les deux solutions sont cependant très comparables et indiquent finalement que les zones présupposées rigides dans les coins ne sont probablement que des zones à très faibles vitesses seulement.

1 Introduction

L'essai de "compression cisailante" encore appelé "squeeze flow" a été développé et utilisé depuis de nombreuses années pour étudier le comportement des matériaux à forte viscosité tels que l'asphalte. Cette technique présente deux avantages majeurs. D'une part les essais sont relativement simples à mettre en œuvre et le matériau peut être sollicité dans une gamme de taux de cisaillement très étendue en un seul essai. D'autre part cette technique s'adapte parfaitement à un nombre important de matériaux généralement difficiles à les caractériser avec les rhéomètres du Laboratoire (matériaux fibreux, bétons, argiles, matériaux possédant une fraction importante de matières solides...) et permet une caractérisation de leur comportement dans des conditions proches de celles de la mise en forme.

Le principe de cet essai est illustré par la figure 1. Un échantillon du matériau, découpé à la forme souhaitée, est écrasé entre deux plateaux montés sur une presse de traction compression. Au cours de l'essai, la presse est pilotée soit à force constante F , soit à vitesse de fermeture $V = -dh/dt$ constante ou à vitesse de déformation $\dot{\epsilon} = -(dh/dt)/h$ constante.

L'enregistrement de la force et de la hauteur h permet ensuite d'analyser le comportement du matériau.

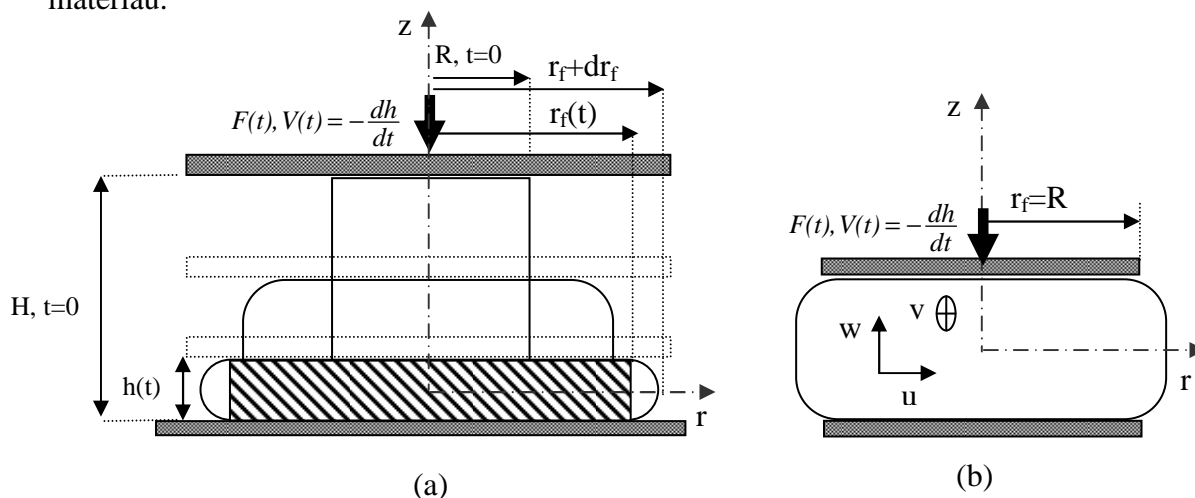


Fig. 1 : Mouvement du matériau pendant la compression, système d'axe utilisé et condition initiale : (a) compression cisailante à volume constant, (b) compression cisailante à rayon constant

Les essais peuvent être réalisés à "volume constant, Fig. 1a" (en supposant que la situation est isochore) ou à "rayon constant, Fig. 1b". Dans les deux cas, on suppose le plus souvent qu'il y a un contact collant entre les plateaux de l'échantillon.

Le matériau est alors soumis à une cinématique de déformation non homogène qui est un mélange de cisaillement et d'élongation qui dépend de la nature du matériau. Dans une telle cinématique, le comportement ne peut être déduit directement, il faut présupposer une loi de comportement et l'identifier par méthode inverse. Cette identification nécessite soit le développement de solutions analytiques, soit l'utilisation d'outils de simulation numérique.

La solution analytique de l'écoulement de la compression cisailante a d'abord été obtenue par Stefan (1874) pour un modèle Newtonien et un écoulement à très faible vitesse (sans inertie). Dans les travaux de Jackson 1962, Kusma 1967, Tichy et Winer 1970, Jones et Wilson 1975 et Hamza et MacDonald 1981, l'inertie a été introduite dans le calcul. D'autres auteurs avaient comme objectif d'examiner l'influence de la rugosité des parois (Wilcock 1978, Phan-Thien 1982), du glissement (Laun 1999) et de la présence des particules solides dans le fluide (Sherwood 2002). La solution de Stefan (1874) a été également étendue au cas d'un modèle en loi de puissance par Scott (1931). La validité expérimentale des solutions visqueuses de Stefan (1874) et Scott (1931) a été examinée sur différents polymères possédant le plus souvent des effets élastiques incluent ceux de Leider 1974, Brindley et al 1976, Grimm 1978, Tichy and Winer 1978 et McClelland et Finlayson 1988. D'une manière générale, ces études montrent qu'avec une compression lente, le comportement d'un matériau viscoélastique est proche de celui du cas correspondant d'un matériau inélastique. Avec une compression rapide, la plus part de ces études expérimentales indiquent qu'un matériau viscoélastique est comprimé plus lentement que celui du cas correspondant d'un matériau inélastique et que dans des conditions de charge très importantes quelques matériaux semblent même «rebondir» après le pressage.

De même d'autres auteurs ont élargi ces solutions au cas d'un modèle en loi de puissance avec développement de contraintes normales (Leider et Bird, 1974) et à différents types de fluides viscoélastiques (Tanner 1965, Kramer 1972, Brindley et al 1976, Phan-Thien et Tanner 1983, Lee et al 1984, Phan-Thien et al 1985). Une approche numérique est proposée par Phan-Thien et al (1987) permet l'analyse de l'écoulement du modèle MPTT (Phan-Thien et Tanner 1978). Ce modèle viscoélastique très général permet d'englober la majorité des approches proposées par les auteurs précédents concernant le modèle d'Oldroyd, de Maxwell... Les approches théoriques utilisées par ces auteurs sont soit basées sur l'approximation de lubrification qui suppose qu'on a affaire à simple cisaillement du fluide sans contraintes normales (la contrainte tangentielle varie linéairement avec z et le gradient de pression ne dépend que de la direction r), soit en tenant compte de toutes les contraintes et des fois même de l'inertie. Une autre approche a été utilisée par McClelland et Finlayson (1983 et 1988) afin d'évaluer la force de pression en particulier. Elle suppose comme dans la théorie de lubrification que la contrainte tangentielle varie linéairement avec z , mais ici en plus du terme de cisaillement il apparaît dans l'expression de la force des termes dus aux différences des contraintes normales, l'ensemble est supposé fonction du gradient de vitesse à la paroi. Ce dernier est évalué en utilisant l'approximation de lubrification.

En ce qui concerne les matériaux viscoplastiques (tels que les produits agroalimentaires et cosmétiques, les écumes, les composites, les graisses, les bétons, les mélanges eau-charbons, le charbon liquide, les boues résiduaire, les boues de forage, les peintures, les mélanges eau-argiles, cf. Bird & al 1983, Utracki 1988) les études ont été également menées depuis longtemps (depuis environ 72 ans), mais jusqu'à présent un grand désaccord apparaît dans ces études. Le problème est que ce type de matériau possède un double comportement ; comportement solide lorsque les contraintes mises en jeu sont inférieures à un seuil et un comportement visqueux au-delà. La première difficulté est de bien représenter le comportement solide du matériau (rigide, élastique, plastique...). La deuxième est de surmonter dans la résolution numérique, analytique et même dans l'expérimentation la discontinuité de la loi de comportement. Enfin, de pouvoir se prononcer sur l'existence ou non dans les écoulements complexes des zones solides et des zones en écoulement en même temps. Si c'est le cas de découvrir la forme de la frontière, appelé "surface seuil", qui sépare ces deux zones.

Le premier schéma de la surface seuil (Fig. 2a) est donné par la théorie de lubrification sans contraintes normales (Scott 1931). Un an après, Peek (1932) critique ce schéma. Selon l'auteur la tranche complètement rigide sur l'axe central de Oz prédite par cette approche ne permet pas à l'échantillon de couler. Par la suite, Scott (1935) modifie sa première analyse et considère au lieu d'un modèle viscoplastique un modèle élastique/plastique. Il obtient le schéma présenté sur la Figure 2c. En 1993, Wilson utilise la théorie de lubrification avec un modèle viscoplastique à double viscosité en tenant compte des contraintes normales dans le calcul du deuxième invariant du tenseur des contraintes. Il propose le schéma représenté sur la figure 2b. Ici, les zones hachurées ne représentent pas vraiment des zones rigides, mais des zones en écoulement avec un modèle Newtonien à forte viscosité. Le schéma indiqué sur la figure 2d a été obtenu par Gartling and Phan-Thien (1984) et O'Donovan and Tanner (1984) en résolvant numériquement les équations du mouvement avec le modèle de Bingham à double viscosité. Ils remarquent que les zones rigides, plutôt les zones à faible gradient de vitesse, si elles existent réellement elles ne peuvent se localiser que dans les coins de l'échantillon. Signalons aussi que O'Donovan and Tanner (1984) ont abouti à la remarque que

le modèle à double viscosité n'est pas vraiment convenable pour étudier les matériaux viscoplastiques. Tasamopoulos (2000), puis Matsoukas and Mitsoulis (2003) aboutissent à la même remarque, c'est-à-dire la localisation dans les coins des zones rigides, en résolvant numériquement les équations du mouvement avec le modèle de Bingham modifié (modèle de Panastasiou), mais la forme de la surface seuil trouvée ici est différente de celle de Gartling and Phan-Thien. Notons aussi que d'après Lipscomb et Denn (1984) il est impossible, d'après la cinétique de l'écoulement, de trouver des surfaces seuils avec des zones rigides dans des écoulements complexes, y'ai compris dans ce problème. Dans tous les cas les arguments donnés par les auteurs sont très convaincants.

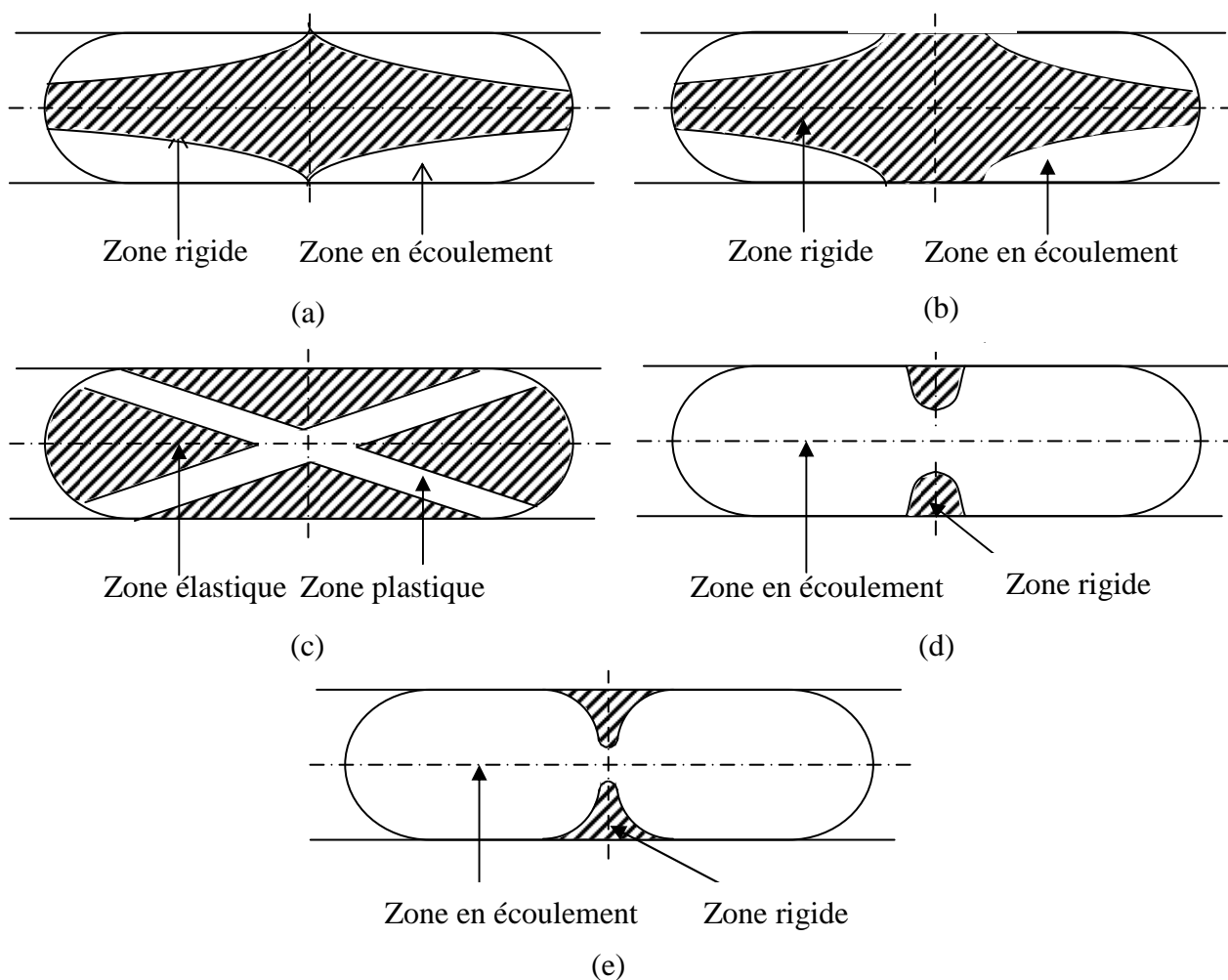


Fig. 2 : Différents schémas de la surface seuil proposés dans la littérature

(a) Scott (1931), Covey et Stanmore (1981)

(b) Wilson (1993)

(c) Peek (1932) et Scott (1935)

(d) Gartling and Phan-Thien (1984) et O'Donovan and Tanner (1984)

(e) Tasamopoulos (2000) et Matsoukas and Mitsoulis (2003)

Le désaccord apparaît aussi dans l'expression de la force. D'après l'analyse de Scott (1931), la hauteur limite h_s qui sépare les deux plaques (hauteur du matériau lors de l'arrêt de l'écoulement) est donnée dans un essai à force et à rayon constants par l'expression suivante :

$$h_s = \frac{2 \pi R^3 s}{3 F} \quad [1]$$

Adam et al (1993) modifient ensuite cette expression en rajoutant à la force la quantité $\sqrt{3} s R^2$. Selon les auteurs la condition $p = p_{atm}$ à $r = R$ prise par Scott n'est pas convenable pour les fluides viscoplastiques. En s'appuyant sur les résultats expérimentaux obtenus dans le domaine plastique, les auteurs proposent de remplacer cette condition par $p = \sqrt{3} s + p_{atm}$ à $r = R$. Adam et al (1993) ont élargi aussi dans leurs travaux la solution de Scott au cas où les deux plaques auraient une forme sphérique, mais toujours dans le cadre de l'hypothèse de lubrification et sans contraintes normales.

Selon l'analyse de Peek (1932), la hauteur limite h_s est :

$$h_s = \frac{2 \pi R^3 s}{F} \quad [2]$$

Oka et Ogawa (19) trouvent :

$$h_s = \frac{\pi R^3 s}{3 F} \quad [3]$$

Une autre analyse (Sherwood et Durban 1996) donne :

$$h_s = \frac{2}{3} m \pi R^3 s \left(F - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi R^2 s \left(\sqrt{1 - m^2} + \arcsin(m) \right) \right) \quad [4]$$

Dans cette dernière analyse les auteurs supposent que le matériau est proche du domaine plastique, la contrainte aux parois a une fraction constante "m" de la valeur du seuil de contrainte et que les contraintes et les vitesses peuvent être exprimées en série inverse du rayon r. La valeur de m est supposée varier entre $m = 0$ (pour un glissement parfait) à $m = 1$ (pour une adhérence parfaite). La démarche des auteurs était originale dans ce problème, cependant la solution analytique obtenue trouve quelques inconvénients. D'abord la condition d'adhérence à la paroi ($u(z = \mp h/2) = 0$) n'est pas satisfaisante pour $m = 1$. De plus la solution prédit des vitesses radiales négatives près de l'axe de symétrie Oz qui contredisent la physique du mouvement. Dans tous les cas, l'approche a été élargie aux cas du modèle en loi de puissance et du modèle de Bingham (Sherwood et Durban 1996), et par la suite au cas du modèle d'Herschel-Bulkley (Sherwood et Durban 1998). En plus, la solution du modèle de Bingham a été comparée par les auteurs aux données expérimentales d'Adams et al (1996) sur la variation de la force en fonction du déplacement de l'échantillon.

D'autre part, on peut noter dans la littérature le manque considérable de données expérimentales avec des fluides viscoplastiques, ce qui a d'ailleurs amplifié les discordances dans les approches théoriques, et numériques. Néanmoins, l'étude expérimentale de Covey et Stanmore (1981) a montré l'intérêt de la première solution du problème (c'est-à-dire la solution de Scott 1931) par rapport aux ceux de Peek (1932) et Oka and Ogawa (19), notamment pour évaluer la valeur du seuil de contrainte connaissant les valeurs de la force et de la hauteur limite h_s (Eq. 1). La même approche (c'est-à-dire Eq.1) a été ensuite utilisée par Sherwood et al (1990) pour caractériser une solution de Bentonite. Mais, le travail expérimental le plus remarquable dans ce problème est celui d'Adams et al (1996). Les auteurs considèrent le problème avec les deux conditions à la paroi (conditions d'adhérence et du glissement) et un fluide viscoplastique possédant des effets élastiques. Ils montrent des photographies du champ de déplacement indiquant que les zones rigides si elles existent vraiment, elles ne peuvent se localiser que dans les coins de l'échantillon (comme dans les

figures 2d et 2e) et au voisinage du front d'onde. Une résolution numérique des équations du mouvement avec le modèle d'Herschel-Belkley pour l'écoulement et le modèle de Hooke pour la déformation élastique a été également effectuée est comparée aux mesures.

Ce grand désaccord nous amène alors dans ce travail à reconsidérer le problème. Nous utiliserons la loi de comportement donnée par le modèle d'Herschel-Bulkley. En supposant que la situation est isotherme et isochore, le comportement mécanique en écoulement peut être représenté, comme suit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p \mathbf{1} + \mathbf{T} \quad [5]$$

Avec

$$T = 2 \eta(\sqrt{-4D_{II}}) \mathbf{D} \quad \text{si } -T_{II} > s^2$$

où

$$\eta(\sqrt{-4D_{II}}) = \frac{s}{\sqrt{-4D_{II}}} + K (\sqrt{-4D_{II}})^{n-1} \quad [6]$$

Avec en plus $\text{tr}(\mathbf{D}) = 0$.

Le critère de plasticité utilisé dans le modèle est celui de Von Mises. $\boldsymbol{\Sigma}$ est le champ du tenseur des contraintes de Cauchy et \mathbf{T} étant le déviateur du tenseur de contrainte. \mathbf{D} et $\mathbf{1}$ sont respectivement le tenseur des taux de déformation et la matrice unitaire. Les deux scalaires $T_{II} = -(1/2) \text{tr}(\mathbf{T}^2)$ et $D_{II} = -(1/2) \text{tr}(\mathbf{D}^2)$ sont les deuxièmes invariants de \mathbf{T} et \mathbf{D} , respectivement. La fonction scalaire $\eta(\sqrt{-4D_{II}})$ étant la viscosité absolue. Cette dernière est définie avec trois paramètres rhéologiques : le seuil de contrainte s , la consistance du matériau K et l'indice de rhéofluidification n . Enfin, le scalaire p est la pression.

Le modèle peut être complété en utilisant les lois les plus simples des lois fondamentales des petites déformations. On suppose avant le seuil de contrainte que le matériau est soit parfaitement rigide, en déformation élastique suivant le modèle d'élasticité linéaire de Hooke ou idéalement plastique, c'est-à-dire :

- Pour un matériau rigide, on a :

$$\mathbf{D} = 0 \quad \text{si } -T_{II} > s^2 \quad [7]$$

- Pour un matériau purement élastique :

$$\mathbf{T} = 2 G \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{si } -T_{II} \leq s^2 \quad \text{avec } \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad [8]$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur de déformation linéaire. Les trois scalaires E , ν ($=1/2$) et G sont respectivement le module d'élasticité de Young, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement.

- Pour un matériau idéalement plastique :

$$\mathbf{T} = \frac{2s}{\sqrt{-4\varepsilon_{II}}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{avec } -T_{II} = s^2 \quad \text{et } \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad [9]$$

où ε_{II} est le deuxième invariant de $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Pour représenter le phénomène du glissement, nous utiliserons la loi postulant que la vitesse du glissement u_s à l'interface matériau solide varie linéairement avec la contrainte tangentielle à la paroi τ_w , soit :

$$u_s = \alpha \tau_w \quad [10]$$

où α est le coefficient du glissement. La situation $\alpha = 0$ correspond à la condition d'adhérence à la paroi.

Nous supposons (cf. Fig.1) à l'état initial que l'échantillon est de forme cylindrique de hauteur H et de rayon R placé entre deux plateaux, un fixe et l'autre mobile. L'essai commence à $t = 0$ en compressant du haut au bas sur le plateau mobile.

Les observations montrent que le front entre $r = r_f(t)$ et $r = r_f + dr_f$ est de forme courbé. Par simplification nous considérons dans le calcul uniquement le domaine hachuré représenté sur la figure 1 avec de plus $dr_f \approx 0$. Nous ignorons les forces de volume et la pression atmosphérique. Il faut cependant signaler que dans l'ensemble des grandeurs calculées la force de la gravité ainsi que la pression atmosphérique s'éliminent, donc elles n'apparaissent pas dans les formules même si nous les prenons en considération.

Compte tenu de la discontinuité de la loi de comportement du matériau utilisée, nous pouvons distinguer entre deux situations séparées par un critère de type :

$$S(H, R, F, s) \leq 0 \quad [11]$$

où $S(H, R, F, s)$ est une fonction à ce stade inconnue de H, R, F et s .

Si cette condition est vérifiée l'échantillon peut être considéré soit entièrement rigide, en déformation élastique ou plastique. Cette situation peut être alors étudiée avec des considérations liées à la mécanique des solides.

Sinon, on peut éventuellement considérer l'existence dans la quantité du matériau en mouvement à la fois des zones en écoulement et des zones élastiques (rigide ou plastique) séparées par des surfaces seuils. Celles-ci obéissent au critère de plasticité de Von Mises, c'est-à-dire le long des surfaces seuil l'équation $\sqrt{-T_{II}} = s$ est vérifiée.

- Dans les zones en écoulement les contraintes dépassent la valeur du seuil ($-T_{II} > s^2$ selon le critère adopté) et par conséquent le matériau coule et les gradients de vitesse ne sont pas nuls.
- Dans les zones élastiques (rigide ou plastique) le matériau se comporte comme un solide. Les composantes du tenseur \mathbf{T} existent dans cette région, mais elles respectent le critère $-T_{II} \leq s^2$ ou bien $-T_{II} = s^2$ pour un matériau idéalement plastique.

Sur ces bases nous commencerons l'étude par la présentation de la théorie élastique. L'intérêt majeure de cette théorie est d'aboutir à la fin aux conditions de démarrage et d'arrêt du mouvement des matériaux élastique/viscoplastique et élastique/plastique. En se basant ensuite sur la solution élastique obtenue et le critère de plasticité de Von Mises nous découvrirons quatre formes possibles de la surface seuil. Nous élaborons après les équations simplifiées de l'écoulement du modèle d'Herschel-Bulkley avec l'approximation de lubrification ($\varepsilon = h/R \ll 1$). Le modèle simplifié obtenu peut être valable dans de nombreux écoulements axisymétriques réels, mais dans notre problème il ne peut être considéré que loin des régions en fortes elongations situées aux voisinages des deux axes de symétrie de l'échantillon. Nous montrerons à partir de ce modèle l'intérêt de prendre en compte les contraintes normales pour les matériaux à seuil de contrainte. Nous déduisons après la solution visqueuse de Scott (1931). Nous la compléterons, vu le manque de détails dans la littérature, au problème à force contrôlée. Enfin, nous proposerons les solutions asymptotiques pour les matériaux rigides viscoplastiques lorsque les contraintes mises en jeu sont proche du plateau plastique (écoulement à très faible vitesse où les effets inertiels et les effets visqueux sont négligeables

par rapport aux effets plastiques), c'est le problème le plus mal abordé dans la littérature qu'il soit par les moyens numériques ou par les outils mathématiques. Son intérêt reste cependant double; intérêt fondamental pour une bonne compréhension de ce type de matériau et intérêt industriel pour une meilleure caractérisation de la valeur du seuil de contrainte.

2 Théorie purement élastique et schémas qualitatifs de la surface seuil

2.1 Théorie purement élastique et domaine d'application

Nous supposons que la force et la profondeur sont très petites et que le rayon et le seuil de plasticité sont très grands pour que dans tout l'échantillon le matériau puisse être considéré en déformation élastique suivant le modèle d'élasticité linéaire de Hooke (8). L'intérêt de l'étude de cette situation est d'aboutir à la fonction $S(H,R,F,s)$ définie précédemment et d'interpréter par conséquent le démarrage et l'arrêt de l'écoulement des matériaux élastique-viscoplastiques lorsque la profondeur atteint une valeur limite. La solution permet aussi d'identifier par méthode inverse la loi de comportement de Hooke et d'évaluer si c'est le cas les paramètres rhéologiques s , G et α .

Nous supposons que la profondeur est très petite devant le rayon pour que la composante ξ_z du vecteur déplacement $\bar{\xi}$ ne dépende que de la position z et t , soit :

$$\xi_z = -2 \int \psi(z,t) dz \quad [12]$$

Avec l'hypothèse des petites déformations le tenseur de déformation linéaire s'écrit, comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial r} + \frac{\partial \xi_r}{\partial z} \right) \\ 0 & \frac{\xi_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial r} + \frac{\partial \xi_r}{\partial z} \right) & 0 & \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad [13]$$

où ξ_r est la composante du vecteur déplacement $\bar{\xi}$ suivant la direction Or .

Le mouvement est isochore, on a donc :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \xi_r)}{\partial r} = - \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \quad [14]$$

Avec l'hypothèse de départ (12) cette dernière équation peut être intégrée. On obtient avec la condition au limite $\xi_r = 0$ à $r = 0$:

$$\xi_r = \Psi(z,t) r \quad [15]$$

Avec la loi de comportement du matériau utilisée les composants du déviateur du tenseur de contraintes s'écrivent, comme suit :

$$t_{rr} = t_{\theta\theta} = 2G\Psi(z,t), \quad t_{zz} = -2t_{rr}, \quad t_{zr} = G r \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad [16]$$

En négligeant l'inertie dans les équations des quantités du mouvement et en remplaçant, on obtient suivant l'axe Or :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = G \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad [17]$$

Suivant l'axe Oz , on a :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -2G \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad [18]$$

En intégrant cette dernière équation, il vient :

$$p = -2G \Psi(z,t) + \Pi(r,t) \quad [19]$$

où $\Pi(r,t)$ est une fonction de r et de t .

En dérivant cette dernière équation par rapport à r et en remplaçant dans l'équation (17), il apparaît que :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} = -A(t) \quad [20]$$

et

$$\frac{1}{2} G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -A(t) \quad [21]$$

où $A(t)$ est une fonction du temps.

En dérivant cette dernière équation avec la condition au limite $\xi_{r,z} = 0$ à $z = 0$, on déduit d'après (16) que la contrainte tangentielle varie linéairement avec z et r . Elle est nulle dans les deux axes de symétrie de l'échantillon ($r=0$ et $z=0$) et maximales aux parois, soit $t_{rz} = -A(t) r z$. La contrainte tangentielle aux parois est donc $\tau_w = A(t) r h$.

Ainsi avec la loi du glissement (10), l'équation (21) donne :

$$\Psi(z,t) = \frac{A(t)}{2G} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) + A(t) \alpha h \quad [22]$$

Cette dernière équation montre que le déplacement radial ($\xi_r = r \Psi(z,t)$) est une fonction parabolique de z .

Avec la condition au limite $\xi_z = 0$ à $z = -h/2$, on déduit l'expression suivante du déplacement vertical :

$$\xi_z = -\frac{A(t)}{G} \left[-\frac{1}{3} z^3 + \left(\frac{h}{2} \right)^2 z + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] - 2A(t) \alpha h \left(z + \frac{h}{2} \right) \quad [23]$$

En intégrant maintenant l'équation (20) et en remplaçant dans l'équation (19), on obtient :

$$p_p = A(t)(B(t) - 4G \alpha h) + \frac{A(t)}{2} (r_f^2 - r^2) \quad [24]$$

où p_p désigne la pression à la paroi et $B(t)$ est une fonction inconnue du temps qui peut être déterminée avec la condition au front (c'est-à-dire à $r = r_f$). Cette condition est à l'heure actuelle très mal prononcée.

Plusieurs auteurs (Leider and Bird 1974, Stefan and Sitzgber 1874, Scott 1931, Brindley 1976, Tanner 1965 et d'autres) utilisent la condition suivante :

$$p = 0 \quad \text{à} \quad r = r_f \quad \text{et} \quad z = \mp h/2 \quad [25]$$

pour tenir compte de la composante extra contrainte t_{rr} , d'autres auteurs (Maccelland and Finlayson 1983, Kramer 1974, Mochimaru 1981) ont utilisé la condition suivante :

$$p - t_{rr} = 0 \quad \text{à} \quad r = r_f \quad \text{et} \quad z = \mp h/2 \quad [26]$$

Lee et al (1984) recommandent l'utilisation de la condition intégrale suivante :

$$\int_{-h/2}^{h/2} (p - t_{rr}) dz = 0 \quad \text{à} \quad r = r_f \quad [27]$$

Enfin, pour les matériaux viscoplastiques Adam et al (1993) proposent de changer la condition (25) par :

$$p = \sqrt{3} s \quad \text{à} \quad r = r_f \quad \text{et} \quad z = \mp h/2 \quad [28]$$

Dans tous les cas une étude future spécifique de la région frontale permet peut être de trancher d'une manière définitive sur la bonne condition à donner aux contraintes et la pression dans cette région. Notons que d'après l'étude numérique d'O'Donovan and Tanner (1984) il suffit de prendre des conditions différentes pour faire apparaître des zones rigides au voisinage du front d'onde. Nous utiliserons dans notre travail la condition au front représentée par l'équation (26).

Calculons maintenant les composantes du tenseur des contraintes. D'après (21) et (16), on a :

$$t_{rr} = t_{\theta\theta} = A(t) \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) + 2G A(t) \alpha h, \quad t_{zz} = -2t_{rr}, \quad t_{zr} = -A r z \quad [29]$$

Les contraintes normales sont donc indépendantes de r et varient paraboliquement avec z . Elles sont maximales dans l'axe de symétrie $z = 0$ de l'échantillon, et nulles aux parois ($z = \pm h/2$) si

Avec la condition au front (26), on déduit :

$$B(t) = 6G \alpha h \quad [30]$$

D'autre part, en négligeant l'inertie du plateau mobile, la fonction du temps $A(t)$ peut être déterminée avec la condition à la paroi suivante :

$$\int_0^{r_f} 2\pi r (p_p - t_{zz}) dr = F \quad [31]$$

On trouve :

$$A(t) = \frac{4F(t)}{\pi(r_f^4 + 24G\alpha h r_f^2)} \quad [32]$$

Avec la condition au limite $\xi_z(z = h/2) = -\Delta h(t)$ (Δh est le déplacement vertical total de l'échantillon) on déduit d'après les équations (32) et (23) la relation entre $\Delta h(t)$ et $F(t)$, soit :

$$\Delta h(t) = \frac{4F(t)h^2}{\pi(r_f^4 + 24G\alpha h r_f^2)} \left(\frac{h}{6G} + 2\alpha \right) \quad \text{où} \quad \Delta h(t) = H - \int_0^t V(t) dt \quad [33]$$

avec

$$r_f = \begin{cases} R & \text{(rayon constant)} \\ \sqrt{\frac{R^2 H}{h}} & \text{(volume constant)} \end{cases} \quad [34]$$

Ces dernières relations permettent dans un essai à force contrôlée ($F(t)$ connue) ou à vitesse contrôlée ($V(t)$ connue) d'identifier par méthode inverse la loi de comportement de Hooke et d'évaluer ainsi les valeurs du module de cisaillement G et du coefficient du glissement α .

Ces relations sont supposées valables si toutes les particules dans l'échantillon sont en déformation élastique. D'après le critère de plasticité de Von Mises, on est dans ce cas lorsque la valeur maximale de l'intensité des contraintes $-T_{II}$ est inférieure à s^2 . Il convient alors de calculer la quantité $-T_{II}$ pour vérifier l'hypothèse.

D'après les résultats précédents, on a

$$-T_{II} = 3t_{rr}^2 + t_{rz}^2 = A(t)^2 \left[3 \left(z^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 + 2G\alpha h \right)^2 + r^2 z^2 \right] \quad [35]$$

Pour plus de clartés dans la discussion nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes :

$$(\hat{z}, \hat{r}, \varepsilon) = \left(\frac{2z}{h}, \frac{r}{h}, \frac{h}{r_f} \right) \quad [36]$$

et les nombres adimensionnels suivants :

$$(S_g, S, -\hat{T}_{II}) = \left(\frac{G\alpha}{h}, \frac{\pi r_f^3 s}{Fh} (1 + 24 S_g \varepsilon^2), \frac{-T_{II}}{s^2} \right)$$

Le nombre S_g représente l'effet du glissement (nul pour une adhérence parfaite) et le nombre S représente l'effet du seuil de contrainte.

Ainsi, l'équation devient :

$$\Sigma = S^2 (-\hat{T}_{II}) = 3\varepsilon^2 (1 - \hat{z}^2 + 8S_g)^2 + 4\hat{r}^2 \hat{z}^2 \quad [37]$$

La fonction Σ introduite possède une valeur limite Σ_{lim} correspondante à $-\hat{T}_{II} = 1$ ($\Sigma_{lim} = S^2$). Pour que notre hypothèse soit valable la valeur de Σ_{lim} doit être supérieure à la valeur maximale de Σ (Σ_{max}).

D'après l'équation (37) la fonction Σ est une fonction croissante de \hat{r} . Par conséquent sa valeur maximale coïncide avec $\hat{r} = 1$ (c'est-à-dire au front). Mais en fonction de \hat{z} , Σ peut être (suivant la valeur de \hat{r}) complètement décroissante (à $\hat{r} = 0$), décroissante de $\hat{z} = 0$ jusqu'à une valeur limite puis elle croit ou totalement croissante. Mais dans tous les cas sa valeur maximale se situe à $\hat{z} = 0$ (c'est-à-dire sur l'axe centrale de l'échantillon) ou à $\hat{z} = \mp 1$ (c'est-à-dire dans les coins) suivant le rapport ε . En définitif, on a :

$$\Sigma_{max} = \begin{cases} \Sigma(\hat{r} = 1, \hat{z} = \mp 1) & \text{si } \varepsilon < \frac{2}{\sqrt{3(1+16S_g)}} \\ \Sigma(\hat{r} = 1, \hat{z} = 0) & \text{si } \varepsilon > \frac{2}{\sqrt{3(1+16S_g)}} \end{cases} \quad [38]$$

Puisque $\Sigma_{lim} = S^2$ doit être supérieur à Σ_{max} , il apparaît immédiatement que l'hypothèse de départ est vérifiée lorsque $F < F_{lim}(h, r_f)$ où :

$$F_{lim}(h, r_f) = \begin{cases} \frac{\pi r_f^3 s}{2h} \left(\frac{1 + 24 S_g \varepsilon^2}{\sqrt{1 + 48 S_g^2 \varepsilon^2}} \right) & \text{si } \varepsilon < \frac{2}{\sqrt{3(1+16S_g)}} \\ \frac{\sqrt{3} \pi r_f^4 s}{3 h^2} \left(\frac{1 + 24 S_g \varepsilon^2}{1 + 8 S_g} \right) & \text{si } \varepsilon > \frac{2}{\sqrt{3(1+16S_g)}} \end{cases} \quad [39]$$

C'est-à-dire, comme prévu au départ, pour des forces et des profondeurs très petites et des rayons et des seuils de plasticité très grands

Ainsi, dans un essai à force constante, si à l'état initial $F < F_{\text{lim}}(H, R)$ le matériau ne coule pas, mais il se déforme. Le déplacement vertical qui peut être mesuré est déduit d'après l'équation (33), soit :

$$\Delta H = \frac{2}{3} \frac{F H^3}{\pi G R^4} \left(\frac{1 + 12 S_g}{1 + 24 S_g \varepsilon^2} \right) \quad [40]$$

Avec dans ce cas (c'est-à-dire à l'état initial) $\varepsilon = H/R$ et $S_g = G\alpha/H$.

Si par contre $F > F_{\text{lim}}(H, R)$ l'échantillon coule, puis il s'arrête lorsque la profondeur atteint une valeur limite h_s . La valeur de h_s peut être calculée en résolution l'équation $F = F_{\text{lim}}(h_s, r_s)$, avec :

$$r_s = \begin{cases} R & \text{(rayon constant)} \\ \sqrt{\frac{R^2 H}{h_s}} & \text{(volume constant)} \end{cases} \quad [41]$$

A rayon constant, on obtient avec la condition d'adhérence à la paroi ($S_g = 0$) :

$$h_s = \begin{cases} \frac{\pi R^3 s}{2F} & \text{si } H < \frac{2\sqrt{3}}{3} R \\ \sqrt{\frac{\sqrt{3} \pi R^4 s}{3 F}} & \text{si } H > \frac{2\sqrt{3}}{3} R \end{cases} \quad [42]$$

Ce critère d'arrêt peut être comparés à celui de la théorie lubrification (Scott 1931) dans le cas où $H < (2\sqrt{3}/3)R$. On obtient la même loi d'échelle avec une sur estimation de la valeur de la profondeur lors de l'arrêt (Eq.(1)). Par contre, l'expression de Peek (1932) (Eq.(2)) sous estime la valeur de la profondeur lors de l'arrêt par rapport à la théorie présentée ici.

A vitesse imposée $V(t)$, on remarque d'après l'équation (33) que la force est à l'état initiale nulle, puis elle varie dans le domaine élastique comme suit :

$$F(h) = \frac{3 \pi G r_f^4 (H - h)}{2 h^3} \left(\frac{1 + 24 S_g \varepsilon^2}{1 + 12 S_g} \right) \quad [43]$$

avec $h = H - \int V(t) dt$, $r_f = r_f(h)$ (Eq. (34)), $S_g = G\alpha/h$ et $\varepsilon = h/r_f$

Cela jusqu'à où la profondeur du matériau atteint la valeur limite h_L (ou bien le front d'onde atteint le rayon r_L), au-delà le matériau peut éventuellement couler. La valeur de h_L peut être calculée en résolvant l'équation $F(h_L) = F_{\text{lim}}(h_L, r_L)$, avec :

$$r_L = \begin{cases} R & \text{(rayon constant)} \\ \sqrt{\frac{R^2 H}{h_L}} & \text{(volume constant)} \end{cases} \quad [44]$$

A rayon constant, on obtient avec la condition d'adhérence à la paroi ($S_g = 0$) :

$$h_L = \begin{cases} 3 \left(\sqrt{1 + \frac{4 s H}{3 G R}} - 1 \right) \frac{G R}{s} & \text{si } H < (2\sqrt{3}/3) R \\ H \left(1 + \frac{2\sqrt{3} s}{9 G} \right)^{-1} & \text{si } H > (2\sqrt{3}/3) R \end{cases} \quad [45]$$

Ces dernières relations donnent les conditions de démarrage et d'arrêt de l'écoulement des matériaux élastiques/viscoplastiques. Elles peuvent être utiles pour évaluer expérimentalement la valeur du seuil de contrainte.

2.2 Schémas de la surface seuil basés sur la théorie élastique

Pour plus de clartés dans la discussion, nous limitons l'analyse suivante au cas d'une parfaite adhérence à la paroi (c'est-à-dire on pose $S_g = 0$). Mais qu'il y est un glissement ou qu'il n'y est pas, signalons que les formes de la surface seuil obtenues ne changent pas, ce qui change c'est l'étendue de leur domaine de validité.

Comme hypothèse principale, on suppose que les zones qui ne vérifient pas l'inégalité $-T_{II} \leq s^2$ sont en écoulement (sans aucune spécification à la loi d'écoulement) et les autres sont en déformations élastiques suivant la solution précédente. La surface seuil $\hat{z} = \hat{\delta}(\hat{r})$ peut être alors calculée en remplaçant dans l'équation (37) $-\hat{T}_{II} = 1$, soit :

$$S^2 = 3\varepsilon^2 \left(1 - \hat{\delta}(\hat{r})^2\right)^2 + 4\hat{r}^2 \hat{\delta}(\hat{r})^2 \quad [46]$$

Signalons cependant que la surface seuil déduite à partir de cette dernière équation peut ne pas être la vraie surface seuil, d'une part à cause de l'invalidité dans ce cas de notre hypothèse de départ selon laquelle la composante ξ_z du vecteur déplacement $\bar{\xi}$ est indépendante de la position r , d'autre part à cause de l'influence de la viscosité ou de la plasticité.

Dans tous les cas l'équation (46) se ramène à une équation du deuxième degré qui peut être discutée et résolue suivant la valeur du déterminant et les limites $-1 \leq \hat{z} \leq 1$ et $0 \leq \hat{r} \leq 1$. On découvre quatre formes possibles des zones élastiques (suivant les valeurs de S et ε) ; zones élastiques en forme de croix, zones élastiques en forme de ceinture, zones élastiques en forme de poumon et Zones élastiques en forme de vallée.

Zones élastiques en forme de croix

On est dans ce cas lorsque $\sqrt{3}\varepsilon < S < 2$ (Fig.3), c'est-à-dire :

$$\frac{\pi r_f^3 s}{2h} < F < \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\pi r_f^4 s}{h^2} \quad [47]$$

On remarque que cette situation ne peut jamais exister si $\varepsilon > 2\sqrt{3}/3$ (c'est-à-dire $h > (2\sqrt{3}/3)r_f$)

Ici, les zones en déformation élastique se localisent près des deux axes de symétrie de l'échantillon ($r = 0$ et $z = 0$). L'épaisseur de la surface seuil $\hat{z} = \hat{\delta}(\hat{r})$ peut être calculée d'après l'expression suivante :

$$\hat{\delta}(r) = \mp \sqrt{1 - \frac{2\hat{r}^2}{3\varepsilon^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3\varepsilon^2}{4\hat{r}^4} (4\hat{r}^2 - S^2)}\right)} \quad \text{avec} \quad \frac{S}{2} \leq \hat{r} \leq 1 \quad [48]$$

Celle-ci se simplifie lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, comme suit :

$$\hat{\delta}(\hat{r}) = \mp \frac{S}{2r} \quad [49]$$

montrant que la surface seuil varie comme r^{-1} lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

On note également que l'épaisseur de la surface seuil aux extrémités de l'échantillon (c'est-à-dire à $\hat{r} = 1$) n'est pas dans ce cas nulle, elle est égale $\hat{\delta}_3$, avec :

$$\hat{\delta}_3 = \mp \sqrt{1 - \frac{2}{3\epsilon^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3\epsilon^2}{4} (4 - S^2)} \right)} \quad [50]$$

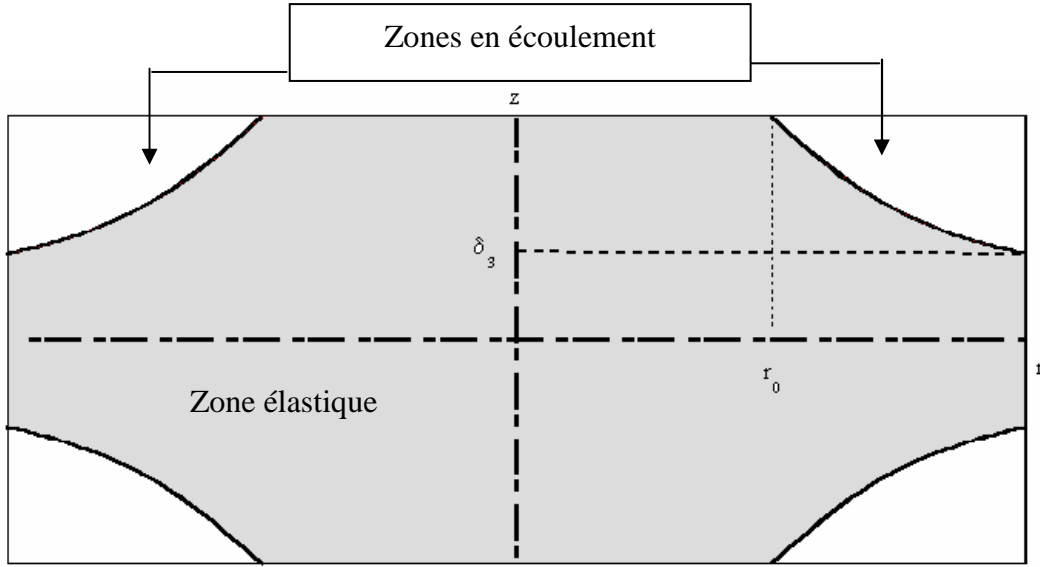


Fig. 3: Zones élastiques en forme de croix

Cette surface seuil ressemble un peu à celle de la théorie de lubrification sans contraintes normales (Covey et Stanmore 1981, Scott 1931, cf. Fig. 2a), mais ici au lieu quelle traverse les parois à l'origine $\hat{r} = 0$, elle les traverse à $\hat{r} = \hat{r}_0$, avec $\hat{r}_0 = S/2$.

Zones élastiques en forme de ceinture

On est dans ce cas (Fig. 4) lorsque :

$$S < \text{Min} \left[2, \sqrt{3} \epsilon, \sqrt{3} \epsilon \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2}{3\epsilon^2} \right)^2} \left(\text{si } \epsilon > \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right] \quad [51]$$

Ici, les effets des contraintes normales sur la surface seuil sont comparables aux effets des contraintes tangentielles. Les zones en déformations élastiques se localisent dans la partie centrale ($0 \leq \hat{r} \leq \hat{r}_1$) et dans les coins seulement ($\hat{z}_2 \leq \hat{z} \leq 1$ ou $-1 \leq \hat{z} \leq -\hat{z}_2$) de l'échantillon, avec :

$$\hat{\delta}_1 = \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{S}{\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4}, \quad \hat{\delta}_2 = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{S}{\epsilon} \right)} \quad \text{et} \quad \hat{r}_1 = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{6 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{S}{\epsilon} \right)^2} \right)} \quad [52]$$

L'épaisseur de la surface seuil $\hat{z} = \hat{\delta}(\hat{r})$ peut être calculée d'après les relations suivantes :

$$\hat{\delta}(r) = \begin{cases} \mp \sqrt{1 - \frac{2\hat{r}^2}{3\epsilon^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3\epsilon^2}{4\hat{r}^4} (4\hat{r}^2 - S^2)} \right)} & \text{si } 0 \leq \hat{r} < \frac{S}{2} \\ \mp \sqrt{1 - \frac{2\hat{r}^2}{3\epsilon^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{3\epsilon^2}{4\hat{r}^4} (4\hat{r}^2 - S^2)} \right)} & \text{si } \frac{S}{2} \leq \hat{r} \leq \hat{r}_1 \end{cases} \quad [53]$$

Notons que cette localisation dans les coins des zones élastiques a déjà été signalée par plusieurs chercheurs, comme Smyrniotis et Tasamopoulos (2000) ainsi que Matsoukas and Mitsoulis (2003) en résolvant numériquement les équations du mouvement avec le modèle viscoplastique de Bingham modifié (modèle de Panastasiou).

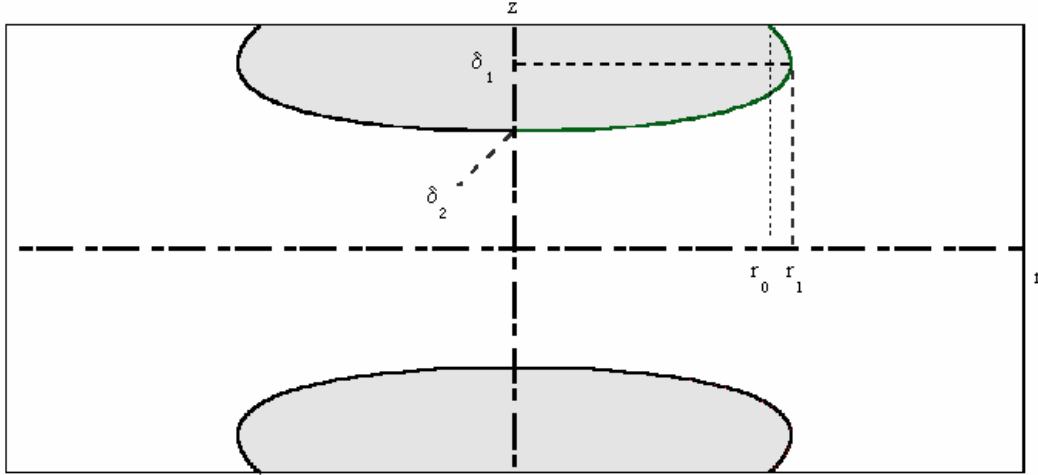


Fig. 4: Zones élastiques en forme de ceinture

Zones élastiques en forme de poumon

On est dans ce cas (Fig. 5) lorsque :

$$\sqrt{3}\varepsilon\sqrt{1-\left(1-\frac{2}{3\varepsilon^2}\right)^2} < S < \text{Min}[2, \sqrt{3}\varepsilon] \quad [54]$$

On peut remarque que cette situation ne peut jamais exister si $\varepsilon < \sqrt{6}/3$ (c'est-à-dire $h < (\sqrt{6}/3)r_f$)

L'épaisseur de la surface seuil $\hat{z} = \hat{\delta}(\hat{r})$ peut être calculée d'après les relations suivantes :

$$\hat{\delta}(r) = \begin{cases} \mp \sqrt{1 - \frac{2\hat{r}^2}{3\varepsilon^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3\varepsilon^2}{4\hat{r}^4} (4\hat{r}^2 - S^2)} \right)} & \text{si } 0 \leq \hat{r} < \frac{S}{2} \\ \mp \sqrt{1 - \frac{2\hat{r}^2}{3\varepsilon^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{3\varepsilon^2}{4\hat{r}^4} (4\hat{r}^2 - S^2)} \right)} & \text{si } \frac{S}{2} \leq \hat{r} \leq 1 \end{cases} \quad [55]$$

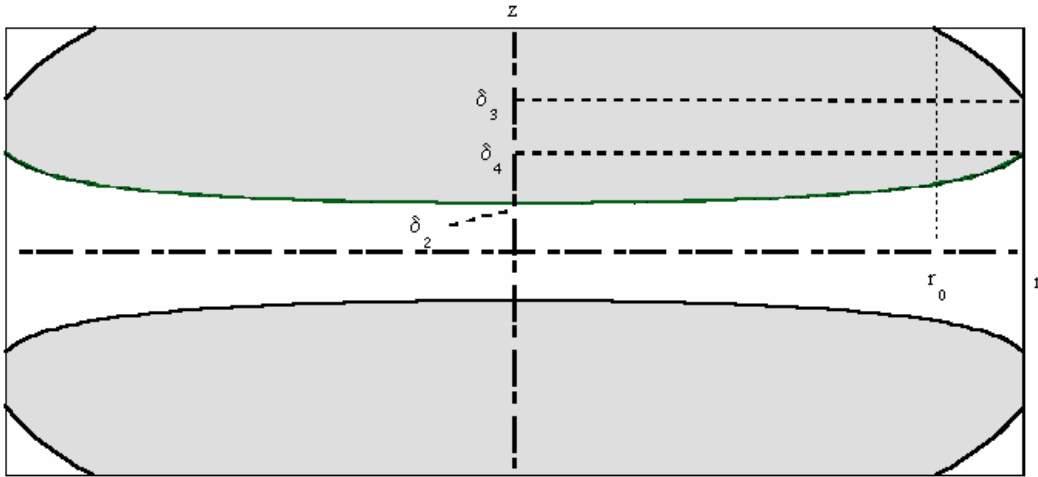


Fig. 5: Zones élastiques en forme de poumon

Ici, quelque soit le rayon il existe des zones en déformation élastique. Ces zones se situent dans toutes les parties supérieures et inférieures de l'échantillon, à l'exemption des régions situées aux voisinages des parois et des extrémités (c'est-à-dire pour $\hat{r}_0 \leq \hat{r} \leq 1$). On peut noter aussi que la surface seuil coupe dans ce cas les extrémités ($\hat{r} = 1$) en deux endroits, à $\hat{\delta}(\hat{r}) = \hat{\delta}_3$ et à $\hat{\delta}(\hat{r}) = \hat{\delta}_4$, avec :

$$\hat{\delta}_4 = \mp \sqrt{1 - \frac{2}{3\epsilon^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3\epsilon^2}{4} (4 - S^2)} \right)} \quad [56]$$

Zones élastiques en forme de vallée

On est dans ce cas (Fig. 6) lorsque :

$$\text{Max} \left[2, \sqrt{3} \epsilon \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2}{3\epsilon^2} \right)^2} \left(\text{si } \epsilon > \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right] < S < \sqrt{3} \epsilon \quad [57]$$

L'épaisseur de la surface seuil $\hat{z} = \hat{\delta}(\hat{r})$ peut être calculée d'après la relation suivante :

$$\hat{\delta}(r) = \mp \sqrt{1 - \frac{2\hat{r}^2}{3\epsilon^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3\epsilon^2}{4\hat{r}^4} (4\hat{r}^2 - S^2)} \right)} \quad ; \quad 0 \leq \hat{r} < 1 \quad [58]$$

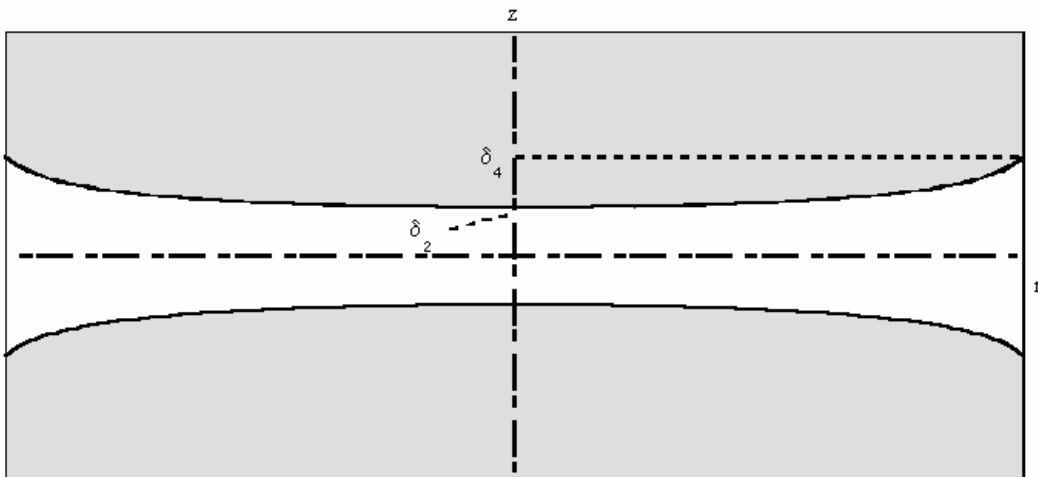


Fig. 6: Zones élastiques en forme de vallée

Ici, les zones en déformation élastique se situent dans toutes les parties supérieures et inférieures de l'échantillon.

3 Equations du mouvement dans les zones très longues en écoulement

Nous adopterons ici la même stratégie d'adimensionnalisation et de simplification que celle qui a été déjà utilisée par Piau (1996) dans le cas d'un écoulement bidimensionnel.

3.1 Equations adimensionnelles générales du mouvement

Nous considérons que les particules sont animées d'un mouvement de vitesse \vec{u} relative à un repère Galiléen suivant la direction Or. La composante de vitesse le long de cet axe est noté u . Les autres composantes sont v le long de la direction θ et w le long de l'axe Oz (Fig. 1). Les équations de base sont celles de la mécanique classique: équation de la quantité du mouvement et équation de conservation de la masse.

L'équation de la quantité du mouvement est la suivante :

$$\rho \dot{\vec{u}} = \rho \vec{g} - \vec{grad} p + \vec{div}(\mathbf{T}) \quad [59]$$

L'équation de continuité est :

$$\vec{div} \vec{u} = 0 \quad [60]$$

où ρ est la masse volumique et \vec{g} est l'accélération gravitationnelle.

La composante de vitesse v est nulle compte tenu de la symétrie. Le tenseur des taux de déformation se simplifie alors, comme suit :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad [61]$$

On déduit l'expression du deuxième invariant de \mathbf{D} , soit :

$$D_{II} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] \quad [62]$$

et aussi l'expression du gradient de vitesse apparent $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{-4D_{II}} = \sqrt{2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2} \quad [63]$$

Deux dimensions caractéristiques de l'écoulement peuvent être considérées, r_f dans la direction du rayon et h qui représente l'épaisseur. Un ensemble de variables adimensionnelles normalisées est choisi (leur ordre de grandeur est 1). Des lettres capitales indiquent les variables normalisées. Pour les coordonnées d'espace et du temps, elles sont choisies comme suit :

$$(R, Z, T) = \left(\frac{r}{r_f}, \frac{z}{\varepsilon r_f}, \frac{V}{r_f} t \right) \quad [64]$$

où la référence V et le paramètre ε sont introduits. Ce paramètre ε est le rapport h/r_f .

Les deux composantes réduites de vitesse (U et W) sont :

$$(U, W) = \left(\frac{u}{V}, \frac{w}{\varepsilon V} \right) \quad [65]$$

La composante w est normalisée par l'intermédiaire de l'équation de continuité.

On suppose que la valeur du seuil de contrainte s donne la norme pour la pression, soit :

$$P = \frac{P}{s} \quad [66]$$

En utilisant ces variables adimensionnelles et l'équation de conservation de la masse, le gradient de vitesse apparent s'écrit, comme suit :

$$\dot{\gamma} = \frac{V}{\varepsilon r_f} \sqrt{4\varepsilon^2 \left[\left(\frac{1}{R} \frac{\partial(RU)}{\partial R} \right)^2 - \frac{U}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \right] + \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial R} \right)^2} \quad [67]$$

La quantité $V / \varepsilon r_f$ donne la norme du gradient de vitesse. On pose alors :

$$\Gamma = \frac{\dot{\gamma}}{V / \varepsilon r_f} \approx \frac{\partial U}{\partial Z} \times \text{sgn} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right) + \Theta(\varepsilon^2) \quad [68]$$

où $\text{sgn}(\partial U / \partial Z)$ est le signe de la dérivée partielle de U par rapport à Z et $\Theta(\varepsilon^2)$ indique un terme très petit d'ordre de grandeur ε^2 .

Nous supposons que l'écoulement est laminaire. Le frottement interne peut être alors représenté par la loi de comportement du matériau. En remplaçant, il résulte en projetant l'équation de quantité du mouvement suivant la direction Or :

$$\begin{aligned} Re \left\{ \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial R} + W \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} + Od \frac{\partial P}{\partial R} = 2\varepsilon Od \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{R}{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial R} \right) - \frac{U}{\Gamma R^2} - \frac{1}{\sqrt{1-4\varepsilon^2(B/\Gamma^2)}} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{B}{\Gamma^2} \right) \right\} + \\ 2\varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \Gamma^{n-1} \frac{\partial U}{\partial R} \right) - \Gamma^{n-1} \frac{U}{R^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\Gamma^{n-1} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] \end{aligned} \quad [69]$$

et suivant l'axe Oz :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 Re \left[\frac{\partial W}{\partial T} + U \frac{\partial W}{\partial R} + W \frac{\partial W}{\partial Z} \right] + Od \frac{\partial P}{\partial Z} = \varepsilon Od \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial W}{\partial Z} \right) + \frac{1}{R \Gamma} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right\} + \\ \varepsilon^2 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Gamma^{n-1} \frac{\partial W}{\partial Z} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \Gamma^{n-1} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] \right\} - \varepsilon^3 \frac{2 Od}{\sqrt{1-4\varepsilon^2(B/\Gamma^2)}} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{B}{\Gamma^2} \right) \end{aligned} \quad [70]$$

Avec

$$B = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial(RU)}{\partial R} \right)^2 - \frac{U}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \quad [71]$$

où Re et Od sont respectivement les nombres de Reynolds et d'Oldroyd définies, comme suit :

$$Re = \frac{\rho V^2}{K} \left(\frac{\varepsilon r_f}{V} \right)^n \varepsilon \quad ; \quad Od = \frac{\varepsilon s}{K} \left(\frac{\varepsilon r_f}{V} \right)^n \quad [72]$$

D'autre part, l'équation de conservation de la masse s'écrit en variables adimensionnelles :

$$\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad [73]$$

En associant ces cinq dernières équations aux conditions initiales et aux conditions aux limites il est possible de résoudre numériquement le problème, mais notre objectif ici est de chercher des solutions asymptotiques.

3.2 Cas asymptotique d'un domaine très long

Les équations (69) et (70) peuvent être discutées et simplifiées suivant les valeurs du rapport ε , du nombre de Reynolds (Re), qui représente les effets inertiels par rapport aux effets visqueux et enfin du nombre d'Oldroyd (Od), qui traduit les effets plastiques par rapport aux effets visqueux. En se limitant au cas où $\varepsilon \ll 1$ (approximation de l'eau peu profonde), il apparaît nécessaire de tenir compte des termes d'ordre de grandeur ε , sinon les effets plastiques n'apparaissent pas directement dans les équations du mouvement. Il résulte suivant l'axe (Or):

$$Re \left\{ \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial R} + W \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} + Od \frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[(U_{,Z} \operatorname{sgn}(U_{,Z}))^{n-1} \frac{\partial U}{\partial Z} \right] \text{ (i.e., le terme visqueux } t_{rz,z} \text{)} +$$

$$2\varepsilon Od \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{U_{,R}}{U_{,Z}} \right) - \frac{1}{R^2} \frac{U}{U_{,Z}} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\left(\frac{(RU)_{,R}}{U_{,Z}} \right)^2 \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{UU_{,R}}{U_{,Z}^2} \right) \right\} \operatorname{sgn}(U_{,Z}) + \Theta(\varepsilon^2)$$

(i.e., les termes plastiques $(rt_{rr})_{,r} / r$, $-t_{\theta\theta} / r$ et $t_{zz,z}$)

[74]

et suivant l'axe Oz :

$$Od \frac{\partial P}{\partial Z} = \varepsilon \frac{Od}{R} \left\{ 1 - 2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{(RU)_{,R}}{U_{,Z}} \right) \right\} \operatorname{sgn}(U_{,Z}) + \Theta(\varepsilon^2)$$

(i.e., les termes plastiques $(rt_{rz})_{,r} / r$ et $t_{zz,z}$)

[75]

On peut remarquer en plus du terme visqueux $t_{rz,z}$ des termes plastiques dus à la contrainte tangentielle t_{rz} et aux contraintes normales t_{rr} , $t_{\theta\theta}$ et t_{zz} . Ainsi, il ne sera pas convenable d'utiliser brutalement pour un matériau viscoplastique la théorie de lubrification sans tenir compte des contraintes normales. Ce résultat limite la validité de toutes les théories basées sur l'approximation de lubrification sans contraintes normales, théorie largement utilisée par plusieurs chercheurs dans ce problème et dans d'autres également (cf. Piau 1996). Enfin, il bien de signaler que le modèle simplifié établi dans ce chapitre peut être également utilisé dans d'autres problèmes d'écoulement axisymétriques où la profondeur de l'écoulement est très petite devant le rayon, comme par exemple dans le problème de consistométrie.

4 Théorie visqueuse (solution de Scott 1931)

En se limitant au cas où $Od \rightarrow 0$ (solution exacte lorsque $s=0$, modèle en loi de puissance), il vient d'après les équations (74) et (75) :

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial R} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = - \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{\partial U}{\partial Z} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \times \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right)^{n-1} \right] + \Theta(\varepsilon^2) \quad [76]$$

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \Theta(\varepsilon^2)$$

Puisque la valeur de s est supposée nulle ou très petite, la pression est normalisée dans ce cas par la quantité ρV^2 , c'est-à-dire par l'inertie, soit :

$$P = \frac{P}{\rho V^2} \quad [77]$$

L'équation (76b) montre que la pression est pratiquement indépendante de z (répartition hydrostatique de la pression le long de l'axe Oz).

Lorsque le nombre de Reynolds (Re) est très petit (cas très fréquent pour les fluides complexes), l'inertie peut être négligée dans l'équation (76a). On obtient en revenant aux variables dimensionnelles :

$$K \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \times \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right)^{n-1} \right] = \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad [78]$$

Avec la condition d'adhérence à la paroi, les conditions aux limites sont les suivantes (sans glissement) : $u(z = \pm h/2) = 0$ (où $h = h(t)$ est la profondeur de la plaque mobile). Par raison de symétrie de l'écoulement on a de plus $u_z(z=0) = 0$. Avec ces conditions, les équations (78) peuvent être intégrées. On obtient entre $r = 0$ et $r = r_f(t)$ le profil de vitesse suivant :

$$u = \frac{1}{m+1} \left(-\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^m \left(\frac{h}{2} \right)^{m+1} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \operatorname{sgn}(z) \right)^{m+1} \right] \quad [79]$$

où $\operatorname{sgn}(z)$ est le signe de z

En intégrant cette dernière équation on déduit l'expression du débit, soit :

$$Q = \int_0^h u dz = \frac{2}{m+2} \left(-\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^m \left(\frac{h}{2} \right)^{m+2} \quad [80]$$

L'équation de continuité à vérifier dans ce cas est la suivante :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{2Q}{r} \quad [81]$$

En remplaçant l'expression du débit (80) dans cette dernière équation, on obtient :

$$\frac{1}{(m+2)2^m r} \left(-\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^m = -\frac{1}{h^{m+2}} \frac{dh}{dt} \quad [82]$$

Le terme du deuxième membre de cette dernière équation est une fonction du temps seulement, il donc possible de poser :

$$-\frac{1}{h^{m+2}} \frac{dh}{dt} = \alpha(t) \quad [83]$$

où $\alpha(t)$ est fonction arbitraire du temps.

En remplaçant (83) et (82) dans l'équation (79) il apparaît que la vitesse radiale varie linéairement avec le rayon, soit :

$$u = r \psi_0 \psi(z,t) \quad \text{avec} \quad \psi(z,t) = 1 - \left(\frac{2z}{h} \operatorname{sgn}(z) \right)^{m+1} \quad \text{et} \quad \psi_0 = \psi_0(t) = \frac{(m+2)\alpha(t) h^{m+1}}{2(m+1)} \quad [84]$$

D'autre part, d'après l'équation (82), on obtient avec la condition $p = 0$ à $r = r_f(t)$ et $z = \mp h/2$:

$$p_p = \frac{2K m}{m+1} [(m+2)\alpha(t)]^{1/m} \left[r_f^{(1+m)/m} - r^{1+m/m} \right] + p_{atm} \quad [85]$$

On déduit grâce à l'équation (31) l'expression de la fonction du temps $\alpha(t)$, soit :

$$\alpha(t) = \left[\frac{(1+3m)F(t)}{2\pi K m} \right]^m \frac{1}{(m+2)r_f^{1+3m}} \quad [86]$$

En remplaçant dans l'équation (83), on aboutit finalement à l'équation différentielle suivante:

$$\frac{1}{h^{m+2}} \frac{dh}{dt} = - \left[\frac{(1+3m)F(t)}{2\pi K m} \right]^m \frac{1}{(m+2)r_f^{1+3m}} \quad [87]$$

où $r_f = r_f(h)$ (Eq. (34))

D'autre part, compte tenu du profil de vitesse (79), on peut intégrer l'équation locale de conservation de la masse et déterminer le profil de vitesse vertical. On obtient avec la condition $w=0$ à $z=-h/2$ l'expression suivante :

$$w = w(z,t) = -h \psi_0 \left[\frac{2z}{h} - \frac{\text{sgn}(z)}{m+2} \left(\frac{2z}{h} \text{sgn}(z) \right)^{m+2} + \frac{m+1}{m+2} \right] \quad [88]$$

Il apparaît que la vitesse verticale est indépendante du rayon. Notons aussi que la condition au limite $w = dh/dt$ à $z = h/2$ est automatiquement vérifiée.

Cette solution est due à Scott (1931). Elle correspond en réalité à la solution externe du problème qui rentre dans la théorie des petites perturbations dont le paramètre est le rapport $\varepsilon = h/r_f$. Johnson (1984) trouve que la solution interne se situe aux voisinages des deux axes de symétrie de l'échantillon, où $z \approx \Theta(\varepsilon^m)$ et $r/h \approx \Theta(\varepsilon)$. Mais ici la correction proposée par Johnson n'a pas apporté une grande amélioration à la solution de Scott.

A vitesse constante l'équation (87) devient :

$$F = F(h) = \frac{2\pi K m}{1+3m} \left(\frac{(m+2)r_f^{1+3m} V}{h^{m+2}} \right)^{1/m} \quad [89]$$

Il suffit dans ce cas de mesurer la force et la profondeur pour évaluer ensuite par ajustement les paramètres rhéologiques (K et m) du matériau. A force constante le problème est différent. Il faut soit dérivée les mesures de $h(t)$ par rapport au temps pour déterminer $V(t)$ (cette technique n'est pas recommandée), soit de développer plus la solution et d'évaluer ces paramètres rhéologiques par ajustement de la courbe expérimentale $h(t)$ à la courbe théorique. Quelques auteurs (par exemple Leider 1974) ont utilisé pour comparer leurs données le concept de la moitié du temps de mesure, c'est-à-dire le temps nécessaire pour presser sur la moitié de la hauteur initiale de l'échantillon. Dans tous les cas, vu le manque de détails dans la littérature, nous proposons de développer plus la solution dans le cas où la force serait constante. Nous recommandons d'utiliser ces formules pour une meilleure évaluation des paramètres rhéologiques. En effet, nous pouvons de cette façon écarter, par analyse de toute la courbe expérimentale $h(t)$, le domaine où les effets inertiels sont significatifs (c'est-à-dire aux temps petits) et le domaine où le matériau glisse.

A volume et force constants l'équation (87) peut être intégrée, on obtient avec la condition initiale $h(t=0) = H$:

$$h = h(t) = H \left\{ \left[\frac{(1+3m)F}{2\pi K m} \right]^m \frac{(5m+3)H^{m+1}}{2(m+2)R^{1+3m}} t + 1 \right\}^{-2/(5m+3)} \quad [90]$$

En remplaçant dans l'équation (), il vient :

$$r_f = r_f(t) = R \left\{ \left[\frac{(1+3m)F}{2\pi K m} \right]^m \frac{(5m+3)H^{m+1}}{2(m+2)R^{1+3m}} t + 1 \right\}^{1/(5m+3)} \quad [91]$$

On peut remarquer que la profondeur du fluide et le rayon du front d'onde varie respectivement, comme :

$$h \propto t^{-2/(5m+3)} \quad \text{et} \quad r_f \propto t^{1/(5m+3)}$$

C'est exactement comme dans le cas de l'écoulement de rupture de barrage en axisymétrique (cf. rapport Piau et Debiane)

A rayon et force constants, on obtient :

$$h(t) = H \left\{ \left[\frac{(1+3m)F}{2\pi K m} \right]^m \frac{(m+1)H^{m+1}}{(m+2)R^{1+3m}} t + 1 \right\}^{-1/(m+1)} \quad [92]$$

Contrairement au cas précédent, ici la profondeur du fluide varie aux temps grands comme $t^{-1/(m+1)}$.

Sur la figure est donnée les profils des vitesses (radiaux et verticaux) en fonction de l'indice m . Les vitesses sont normalisées par leurs valeurs maximales, c'est-à-dire par $u(z=0) = r\psi_0$ pour la vitesse radiale et $w(z=h/2) = -V = dh/dt$. Les profils des vitesses radiales et les profils des vitesses verticales sont respectivement symétriques et antisymétriques par rapport à l'axe $z=0$. Notons aussi que le profil de vitesse vertical n'est pas très sensible à la variation de l'indice m , mais le profil de vitesse radial est cependant assez sensible. L'augmentation de m entraîne un plateau au voisinage de l'axe de symétrie $z=0$.

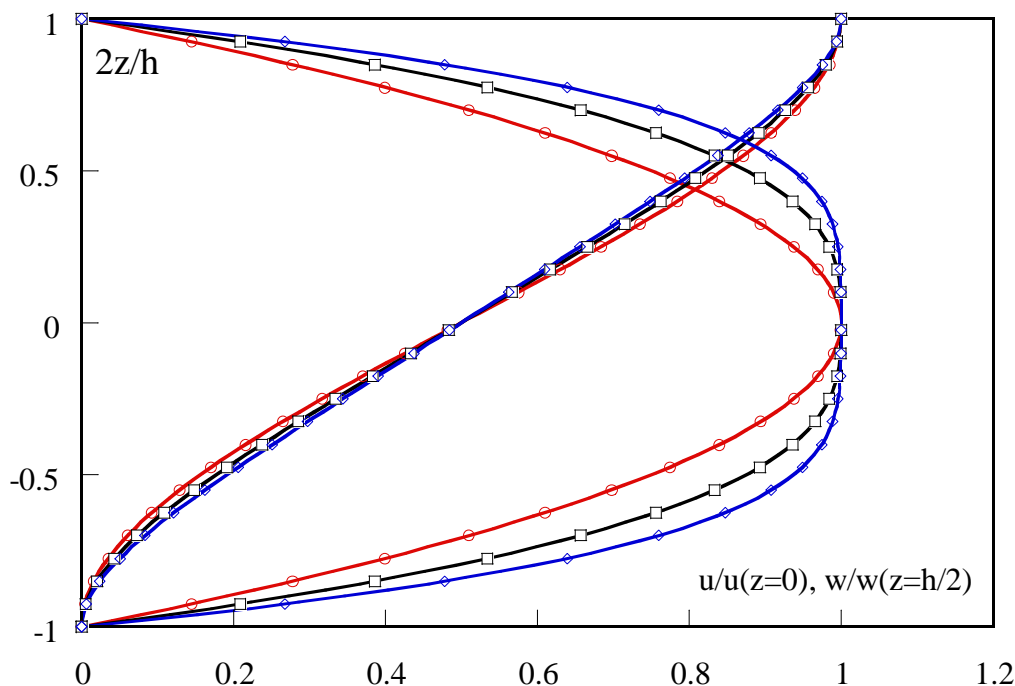


Fig. 7 : Variations des profils des vitesses en fonction de l'indice de m pour un modèle en loi de puissance. Les profils antisymétriques correspondent aux profils verticaux et les profils symétriques correspondent aux profils radiaux. (○ $m=1$, □ $m=2$ et ◇ $m=3$)

5 Théorie rigide / viscoplastique

La solution élastique et la solution visqueuse reposent sur une hypothèse forte selon laquelle la vitesse verticale (ou bien le déplacement vertical) est une fonction de z et de t seulement. Cela revient aussi à considérer que la vitesse radiale (ou le déplacement radial) varie linéairement avec r . Cette hypothèse est étroitement liée à l'équation de conservation de la masse.

En effet, en intégrant l'équation locale de conservation de la masse entre $z = -h/2$ et $z = h/2$ avec les conditions aux limites $u(z = \mp h/2) = 0$, $w(z = -h/2) = 0$ et $w(z = h/2) = dh/dt$, on obtient :

$$\frac{dh}{dt} + \frac{dQ}{dr} + \frac{Q}{r} = 0 \quad \text{avec} \quad Q = \int_{-h/2}^{h/2} u \, dz \quad [93]$$

D'autre part, en appliquant le principe de conservation de la masse à un volume du matériau de rayon r et de profondeur variable $h(t)$, nous obtenons l'expression suivante (elle traduit également la conservation de la masse) :

$$\frac{dh}{dt} + \frac{2Q}{r} = 0 \quad [94]$$

En comparant (93) à (94), on déduit que la solution du problème doit impérativement vérifier les deux équations suivantes :

$$\frac{dh}{dt} + \frac{2Q}{r} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dQ}{dr} = \frac{Q}{r} \quad [95]$$

Ainsi, la solution la plus simple qui vérifie ces équations et la condition au limite $u(r=0) = 0$ est celle où la vitesse radiale (ou le vecteur déplacement radial) est une fonction linéaire de r , c'est à dire :

$$u(r, z, t) = r\psi(z, t) \quad [96]$$

En intégrant l'équation locale de conservation de la masse, on montre aussi que la vitesse verticale (ou le déplacement vertical) est une fonction de z et de t seulement, soit :

$$w(r, z, t) = w(z, t) = -2 \int \psi(z, t) dz \quad [97]$$

Cette forme de la solution est convenable pour le modèle Newtonien (Stefan 1874), même en tenant compte de l'inertie (Jackson 1962, Kusma 1967 et d'autres), pour le modèle purement élastique de Hooke et pour plusieurs d'autres modèles viscoélastiques, tels que le modèle d'Oldroyd (Phan-Thien and Walsh, 1984), le modèle du second ordre (Brindley et al 1975), modèle de Maxwell (Phan-Thien and Tanner 1982, Lee et al 1983), etc. De plus, elle reste approximativement valable (lorsque $h \ll R$), pour le modèle en loi de puissance (Scott 1931). Il est par conséquent nécessaire d'examiner cette forme de la solution dans le cas d'un matériau rigide / viscoplastique (modèle d'Herschel-Bulkley).

Contrairement aux modèles précédents, il apparaît dans ce cas que la forme de la solution recherchée n'est pas la vraie solution du problème. Néanmoins, des solutions asymptotiques très utiles peuvent être obtenues vérifiant assez bien l'hypothèse qu'il soit dans la région externe ou dans la région interne.

5.1 Solution externe

Les équations du mouvement à considérer dans cette région sont données par le modèle simplifié obtenu précédemment avec l'approximation de l'eau peu profonde (Eqs. (74) et (75)). Pour plus de simplifications, on introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\left(\hat{z}, \hat{r}, \varepsilon, \hat{\Psi}, \hat{p} \right) = \left(\frac{2z}{h}, \frac{r}{h}, \frac{h}{r_f}, \frac{r_f \psi}{V}, \frac{p}{s} \right) \quad \text{où} \quad V = -\frac{dh}{dt} \quad [98]$$

En remplaçant ainsi l'hypothèse (96) dans les équations (74) et (75), on obtient :

$$\frac{\partial \Pi(\hat{r}, t)}{\partial \hat{r}} = \frac{2^{n+1}}{Od \varepsilon^2} \hat{r}^n \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left[\left(\hat{\psi}' \operatorname{sgn}(\hat{\psi}') \right)^n \operatorname{sgn}(\hat{\psi}') \right] - \frac{1}{2\hat{r}^2} \left[6 \frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}'} + 12 \frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}'} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}'} \right) - \hat{z} \right] \operatorname{sgn}(\hat{\psi}')$$

[99]

$$\hat{p} = \frac{\varepsilon}{2\hat{r}} \left[\hat{z} - 4 \frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}'} \right] \text{sgn}(\hat{\psi}') + \varepsilon \Pi(\hat{r}, t) \quad [100]$$

où $\hat{\psi}' = \partial \hat{\psi} / \partial \hat{z}$ et $\Pi(\hat{r}, t)$ est une fonction arbitraire de \hat{r} et t .

Od est le nombre d'Oldroyd définit, comme suit :

$$Od = \frac{s}{K} \left(\frac{h}{V} \right)^n \quad [101]$$

Il apparaît d'après l'équation (99) que la forme de la solution recherchée n'est pas la vraie solution du problème. Mais en se limitant au cas où $Od \varepsilon^2 \ll 2^{n+2}$, on remarque que le deuxième terme du deuxième membre de l'équation (99) peut être négligé. Ce cas coïncide avec le modèle visqueux étudié précédemment. Si par contre $Od \varepsilon^2 \gg 2^{n+2}$ (écoulement à très faibles vitesses), c'est le premier terme du deuxième membre qui peut être négligé.

C'est cette dernière situation qui nous intéresse dans cette étude. Ainsi, les équations (99) et (100) se simplifient, comme suite :

$$6 \frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}'} + 12 \frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}'} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}'} \right) - \hat{z} = A(t) \text{sgn}(\hat{\psi}') \quad [102]$$

$$\hat{p} = \frac{\varepsilon}{2\hat{r}} \left[\hat{z} - 4 \frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}'} \right] \text{sgn}(\hat{\psi}') + \frac{\varepsilon}{2\hat{r}} A(t) + \frac{B_e(t)}{s} \quad [103]$$

où $A(t)$ et $B_e(t)$ sont des fonctions arbitraires de t .

Avec les conditions aux limites $\hat{\psi} = 0$ à $\hat{z} = \mp 1$ (conditions d'adhérence à la paroi), l'équation (102) peut être résolue, on trouve :

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_{e0}(t) (1 - \text{sgn}(\hat{z}) \hat{z})^\beta \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{12}{\sqrt{21-3}} \quad \text{et} \quad A(t) = 1 \quad [104]$$

où $\hat{\psi}_{e0}(t)$ est une fonction arbitraire de t , c'est la valeur maximale de ψ correspondante à $z = 0$.

Notons que le profil de vitesse radial représenté par l'équation (104) ne vérifie pas la condition $\hat{\psi}' = 0$ à $\hat{z} = 0$, ce qui rend d'ailleurs ce profil un profil de vitesse externe qui peut être valable uniquement au dehors des deux axes de symétrie de l'échantillon.

Le profil de vitesse vertical est obtenu en intégrant l'équation (104) avec les conditions aux limites $\hat{w} = 0$ à $z = -1$ et $\hat{\psi} = -1$ à $\hat{z} = 1$ et en assurant la continuité du profil à $\hat{z} = 0$. Il résulte :

$$\hat{w} = \frac{w}{V} = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - \hat{z})^{\beta+1} - 1 & \text{si } \hat{z} \geq 0 \\ -\frac{1}{2} (1 + \hat{z})^{\beta+1} & \text{si } \hat{z} \leq 0 \end{cases} \quad [105]$$

et la fonction $\hat{\psi}_{e0}(t)$ aura pour expression :

$$\hat{\psi}_{e0}(t) = \frac{\beta + 1}{2\varepsilon} \quad [106]$$

D'autre part, on déduit d'après l'équation (103) que le long des parois la pression est constante ayant l'expression suivante :

$$p_p = B_e(t) \quad [107]$$

La condition au bord $p_p = 0$ (ou $p_p - t_{rr}|_{\hat{z}=\mp 1} = 0$) à $\hat{r} = \hat{r}_f$ entraîne $B_e(t) = 0$, soit d'après la condition à la paroi (31), $F = 0$. Ce résultat contredit évidemment la physique du mouvement. Le remède est d'utiliser la condition $p_p = \sqrt{3}s$ à $\hat{r} = \hat{r}_f$ et $\hat{z} = \mp 1$ suggérée par Adam et al (1993) pour les matériaux plastiques ou viscoplastiques. Cette dernière condition donne l'expression suivante de la force :

$$F = \sqrt{3} \pi s r_f^2 \quad [108]$$

C'est-à-dire, à une constante près, comme dans le cas du blocage des matériaux viscoplastiques dans les tuyaux circulaires.

5.2 Solution interne

Nous supposons dans cette région (près des deux axes de symétrie de l'échantillon) que le matériau est soumis à une forte elongation. Les contraintes tangentielles peuvent être alors considérées très faibles devant les contraintes normales et par conséquent la composante déviatrice du tenseur du taux des déformations devrait être faible devant les autres composantes.

Avec l'hypothèse (96) et en supposant que le signe de ψ est partout positif ou nul, le gradient de vitesse aura l'expression suivante :

$$\hat{\gamma} = \frac{h \dot{\gamma}}{\varepsilon V} = \hat{\psi} \sqrt{12 + \left(\frac{2}{\varepsilon} \hat{r} f\right)^2} \quad \text{avec} \quad f = f(\hat{z}, t) = \frac{\hat{\psi}'}{\hat{\psi}} \quad [109]$$

L'approximation consiste tout simplement à considérer que :

$$\xi = \frac{2}{\varepsilon} \hat{r} f \ll \sqrt{12} \quad [110]$$

En remplaçant l'hypothèse (96) dans les équations globales du mouvement (59) tout en négligeant l'inertie, il résulte suivant l'axe (Or) :

$$\frac{\varepsilon^2}{4} (12 + \xi^2)^{3/2} \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} = \frac{\varepsilon^n}{Od} (12 + \xi^2)^{n+1} \hat{\psi}^n \left\{ (2(7-n) + n\xi^2) f^2 + (12 + n\xi^2) \frac{\partial f}{\partial \hat{z}} \right\} - \left\{ 2f^2 - 12 \frac{\partial f}{\partial \hat{z}} \right\} \quad [111]$$

Suivant l'axe (Oz), on obtient :

$$\varepsilon^2 (12 + \xi^2)^{3/2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} = \frac{\varepsilon^n}{Od} (12 + \xi^2)^{n+1} \hat{\psi}^n \left\{ (24(1-2n) + (1-3n)\xi^2) \varepsilon^2 f + 8(1-n) \hat{r}^2 \frac{\partial f^2}{\partial \hat{z}} \right\} + \left\{ (24 + \xi^2) \varepsilon^2 f + 8 \hat{r}^2 \frac{\partial f^2}{\partial \hat{z}} \right\} \quad [112]$$

On retrouve le modèle de la solution externe lorsque $\xi \gg \sqrt{12}$. En utilisant cette condition et l'expression du profil de vitesse externe établi précédemment (Eq. (104)), on peut déduire maintenant le domaine de validité de la solution externe, soit :

$$\hat{r} \gg \frac{\sqrt{3}}{\beta} \varepsilon \quad , \quad 1 - \hat{z} \ll \frac{\sqrt{3} \beta}{3\varepsilon} \quad \text{et} \quad Od \varepsilon^2 \gg 2^{n+2} \quad [113]$$

Si $\sqrt{2^{n+2}} Od^{-1/2} \ll \varepsilon \ll \sqrt{3} \beta / 3$, la solution externe peut être considérée valable dans pratiquement tout le domaine du fluide.

A l'ordre de $\Theta(\xi^2)$ les équations (111) et (112) se simplifient également et d'une manière plus significative. En effet, dans ce cas on remarque que la forme de la solution recherchée est convenable même en tenant compte de la viscosité, d'ailleurs même de l'inertie (négligée dans ce travail). Mais pour simplifier, nous considérons comme précédemment, le cas des écoulements à très faibles vitesses (contraintes proches du plateau plastique, c'est-à-dire $Od \gg \varepsilon^n$). Dans ce cas les composantes du déviateur du tenseur des contraintes s'écrivent, comme suit :

$$\frac{t_{rr}}{s} = \frac{t_{\theta\theta}}{s} = \frac{2}{\sqrt{12 + \xi^2}}, \quad t_{zz} = -2t_{rr}, \quad \frac{t_{zr}}{s} = \frac{\xi}{\sqrt{12 + \xi^2}} \quad [114]$$

Ainsi, à l'ordre de $\Theta(\xi^2)$ les équations (111) et (112) deviennent respectivement :

$$\frac{1}{6\hat{r}} \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{r}} = 2 \frac{\partial f}{\partial \hat{z}} - f^2 \quad [115]$$

$$\hat{p} = \frac{2}{\sqrt{3}\varepsilon^2} \left(6\varepsilon^2 \ln(\hat{\psi}) + 2\hat{r}^2 f^2 + \Pi(\hat{r}, t) \right) \quad [116]$$

où $\Pi(\hat{r}, t)$ est une fonction inconnue de r et de t .

D'après l'équation (115) il apparaît que :

$$\frac{1}{6\hat{r}} \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{r}} = -4a^2 \quad [117]$$

et

$$2 \frac{\partial f}{\partial \hat{z}} - f^2 = -4a^2 \quad [118]$$

où a est une constante ou une fonction du temps seulement.

Avec la condition $f = 0$ à $\hat{z} = 0$ cette dernière équation peut être intégrée, on obtient :

$$f = 2a \tanh(-a\hat{z}) \quad [119]$$

On remarque que f varie entre 0 et $2a$ lorsque \hat{z} varie entre 0 et l'infini.

Il est possible maintenant d'examiner le domaine de validité de la solution interne. D'après l'hypothèse (110) et l'expression de la fonction f il apparaît immédiatement que la solution est valable, comme prévue, près de l'axe de symétrie $\hat{z} = 0$ ($\hat{r} \ll (\sqrt{3}/2a)\varepsilon$) et au voisinage de l'axe de symétrie $\hat{r} = 0$. Donc, si $\varepsilon \gg 2\sqrt{3}a/3$, la solution interne peut être considérée valable dans tout le domaine de l'écoulement.

Compte tenu de la définition de la fonction f , on déduit par intégration l'expression de $\hat{\psi}$:

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_{i0} \left(1 - \tanh^2(a\hat{z}) \right) \quad [120]$$

où $\hat{\psi}_{i0}$ est la valeur maximale de $\hat{\psi}$ correspondante à $\hat{z} = 0$, c'est une fonction du temps à ce stade inconnue.

La fonction $\hat{\psi}$ qui donne le profil radial de vitesse varie comme la fonction tangente hyperbolique. Sa valeur maximale ($\hat{\psi}_{i0}$) correspond à $\hat{z} = 0$, puis elle tend vers zéro lorsque $\hat{z} \rightarrow \mp\infty$. Par conséquent, la condition d'adhérence à la paroi ($\hat{\psi} = 0$ à $\hat{z} = \mp 1$) ne peut être vérifiée qu'à un pourcentage près.

Pour cela, commençant d'abord par le calcul de la vitesse verticale. Il vient en intégrant l'équation (120) avec la condition $\hat{w} = 0$ à $\hat{z} = -1$:

$$\hat{w} = -\varepsilon \int \hat{\psi} dz = -\varepsilon \hat{\psi}_{i0} \left[\hat{z} + 1 + \frac{\tanh(a\hat{z}) + \tanh(a)}{a} + \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{1 - \tanh(a\hat{z})}{1 + \tanh(a\hat{z})} \frac{1 - \tanh(a)}{1 + \tanh(a)} \right) \right]$$

[121]

Avec la condition $\hat{w} = -1$ à $\hat{z} = 1$ la fonction $\hat{\psi}_{i0}$ aura pour expression :

$$\hat{\psi}_{i0} = \frac{A(a)}{\varepsilon} \quad \text{où} \quad A(a) = \left[2 + \frac{\tanh(a)}{2a} + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1 - \tanh(a)}{1 + \tanh(a)} \right) \right]^{-1} \approx \frac{2a}{\tanh(a)} \quad [122]$$

Il reste maintenant à évaluer la valeur de la constante a .

- Considérons d'abord le problème avec glissement à la paroi. On remarque compte tenu de l'approximation (110) que la contrainte tangentielle à la paroi varie linéairement avec r , comme suit :

$$\frac{\tau_w}{s} = \mp \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{a \tanh(a)}{\varepsilon} \hat{r} \quad [123]$$

D'autre part la vitesse du glissement à la paroi varie également linéairement avec r , soit d'après les résultats précédents :

$$\frac{u_s}{V} = \frac{A(a)(1 - \tanh^2(a))}{\varepsilon} \hat{r} \quad [124]$$

En comparant ces deux dernières équations à la loi du glissement (10), on déduit que la valeur de a peut être déterminée en résolvant numériquement, suivant la valeur de la quantité $\alpha s/V$, l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{A(a)(1 - \tanh^2(a))}{a \tanh(a)} = \frac{\alpha s}{V} \quad \text{ou bien} \quad a \approx \operatorname{atanh} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{(\alpha s/V) + \sqrt{3}}} \quad [125]$$

L'approximation (110) donne d'après les équations (114) les composantes des contraintes suivantes :

$$\frac{t_{rr}}{s} = \frac{t_{\theta\theta}}{s} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad t_{zz} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{t_{zr}}{s} = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{f}{\varepsilon} \hat{r} \quad [126]$$

Ainsi, avec la condition au bord $p - t_{rr} = 0$ à $\hat{r} = \hat{r}_f$ et $\hat{z} = \mp 1$, il résulte d'après les équations (116) et (117) :

$$\frac{p_p}{s} - \frac{t_{zz}}{s} = \frac{8a^2(3 - 2 \tanh^2(a))}{\sqrt{3} \varepsilon^2} (1 - \hat{r}^2) + \sqrt{3} \quad [127]$$

On déduit d'après la condition à la paroi () l'expression de la force, soit :

$$\frac{F}{\pi s r_f^2} = \frac{4a^2(3 - 2 \tanh^2(a))}{\sqrt{3} \varepsilon^2} + \sqrt{3} \quad [128]$$

Cette dernière expression peut être supposée valable avec ou sans glissement à la paroi, mais seulement si $2\sqrt{3}a/3 \ll \varepsilon \ll Od^{1/n}$.

- Supposons maintenant qu'il y a un contact quasiment collant entre les plateaux de l'échantillon. Pour évaluer dans ce cas la valeur de la constante a , nous avons choisi d'ajuster le profil de vitesse vertical externe (Eq. (105)) au profil de vitesse interne (Eq.(121)). D'abord on fixe une valeur de a arbitraire. Avec cette valeur on calcul d'une part la quantité $\varepsilon \hat{\psi}_{i0}$, d'après l'équation (122), d'autre part les vitesses internes (Eq.(121)) et les vitesses externes (Eq.(105)) et cela pour plusieurs valeur de \hat{z} . Nos recommençons ensuite le calcul pour d'autres valeurs de a jusqu'à avoir un meilleur accord entre les deux profils de vitesses. Le résultat du calcul est représenté sur la figure 7. Avec $a \approx 6,674$ on remarque un bon accord (l'écart maximum est de 2.8%) entre la solution externe et la solution interne. La

quantité $A(a)$ aura ainsi pour valeur 3.337 (au lieu de 4.291 dans la région externe), soit $\hat{\psi}_{i0} = 3.337/\varepsilon$. Le profil radial de vitesse devient d'après l'équation (120) et ces derniers résultats, comme suit :

$$\frac{\varepsilon u(z,r)}{V} \approx 3.337 \hat{r} (1 - \tanh^2(6,674 \hat{z})) \quad [129]$$

La forme de ce profil de vitesse peut être comparée qualitativement à celui du profil de déplacement obtenu expérimentalement par Adams et al (1997) avec un modèle viscoplastique ($s = 15 \text{ MPa}$, $n = 0.34$ et $K = 0.39 \text{ MPa.s}^{-1}$) dans un essai à volume constant et à vitesse constante ($V = 0.083 \text{ mm/s}$). En effet, la photographie du champ de déplacement présentée par les auteurs pour $\varepsilon \approx 0.2$ ($h \approx 14 \text{ mm}$ et $r_f \approx 71 \text{ mm}$) donne la même allure des courbes notamment au voisinage de l'axe de symétrie $z = 0$ où la solution interne peut être valable pour cette valeur de ε et la valeur déduite du nombre d'Oldroyd ($Od \approx 0.067$).

De même, l'allure du profil peut être comparée à celui de la solution numérique de Tasamopoulos (2000), mais toujours pour \hat{r} très petit (cf. figure 9). L'auteur considère le problème de compression cisailante à rayon constant. Il suppose que les deux plateaux sont mobiles avec des vitesses constantes V de sens opposées. Il définit le nombre ε comme le rapport $h/2R$ et le nombre d'Oldroyd comme étant le nombre de Bingham. Ainsi, la solution de Tasamopoulos (2000) se déduit à partir de notre solution en prenant $2V$ et 2ε en place de V et ε , respectivement. Malheureusement, il est impossible de faire une comparaison stricte entre les deux solutions car les deux problèmes sont finalement différents. Tasamopoulos considère le cas des écoulements à des vitesses relativement importantes. En effet, avec la valeur maximale du nombre d'Oldroyd prise par l'auteur (égale à 1000), on remarque que ε doit être $0.05 \ll \varepsilon \ll 2.2$ ou $3.8 \ll \varepsilon \ll 500$ (respectivement pour la solution externe et la solution interne) pour que nos solutions asymptotiques (proches du plateau plastique) soient valables dans tout le domaine du fluide. Or, les valeurs de ε prises par l'auteur dépassent ces limites ($\varepsilon = 0.1$, cf. figure 9). Néanmoins, en se limitant à $\hat{r} \ll 0.26 \varepsilon$ (soit $\hat{r} \ll 0.026$ pour la valeur de ε prise par l'auteur) la solution interne est supposée également même pour des matériaux à forte viscosité. C'est la raison qu'on obtient (figure 9 avec $\hat{r} = 0.01564$, valeur qui n'est très faible) qualitativement la même allure des courbes et l'écart peut être expliqué par le fait que le domaine du calcul numérique sort du domaine de validité de nos solutions asymptotiques. Notons que le meilleur accord entre la solution numérique et la solution interne est obtenu avec une valeur de a égale à 2.9 au lieu de 6.674.

Remarquons aussi d'après la figure 7 que les profils de vitesse radial et vertical restent respectivement symétrique et antisymétrique par rapport à l'axe $\hat{z} = 0$, mais leur forme est différente par rapport au cas visqueux. Ici, on obtient au voisinage de la paroi ($\hat{z} > 0.5$ ou $\hat{z} < -0.5$) une zone à très faible vitesse (les vitesses sont quasiment nulles). C'est comme si cette région était rigide, mais elle n'est pas vraiment. Il est donc très probable que les zones rigides obtenues par les solutions numériques de Gartling and Phan-Thien (1984), Tasamopoulos (2000) et Matsoukas and Mitsoulis (2003) ne sont pas finalement des vraies zones rigides, mais des zones à très faible gradient de vitesse.

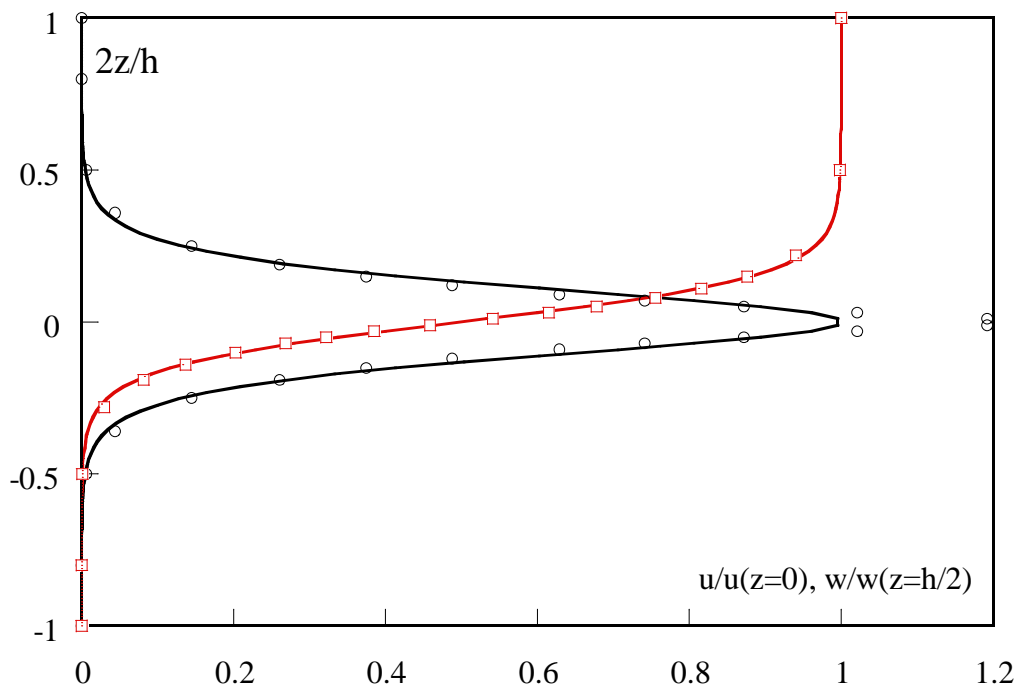


Fig. 8 : Profils des vitesses dans les régions interne et externes : les courbes en ligne continue représentent la solution interne et les courbes avec symboles représentent la solution externe. Les profils antisymétriques correspondent aux profils verticaux et les profils symétriques correspondent aux profils radiaux.

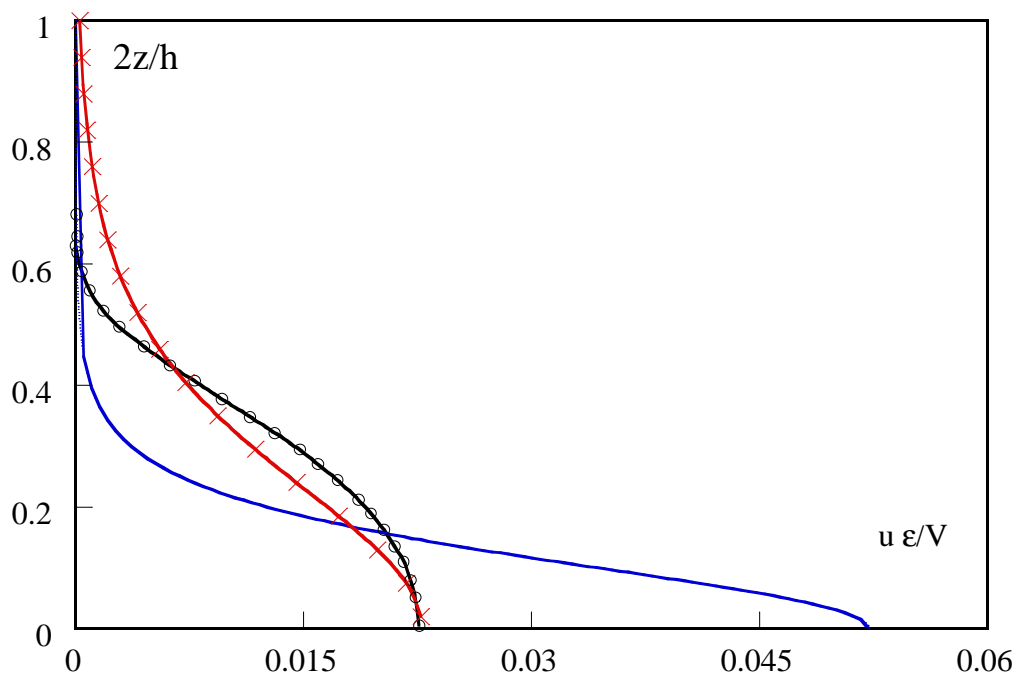


Fig. 9 : Comparaison entre les résultats numériques (Smyrniotis, 2001) et la solution analytique obtenue dans ce travail sur la vitesse radiale ($\hat{r} = 0.01564$, $\varepsilon = 0.1$, $Od = 1000$, $n = 1$). La courbe le symbole « O » représente la solution numérique, la courbe sans symbole représente la solution interne avec $a = 6,674$ et la courbe le symbole « X » représente la solution interne avec $a = 2,9$.