

IRupture de barrage en régime laminaire : fluides viscoplastiques

I.1 Orientation de l'étude vers le problème des laves torrentielles

Les laves torrentielles sont des écoulements particuliers lors desquels une masse importante d'un matériau intermédiaire entre l'eau boueuse et un sol saturé s'écoule sur une pente assez forte. Ce problème a retenu l'attention des ingénieurs (notamment les hydrauliciens), des géomorphologues, et des géologues. Les géologues soulignent la nature des roches sédimentaires constituant les laves. Les observations de coulées sont nombreuses et ont été réalisées dans plusieurs régions dans le monde, Japon, Chine, USA, New Zealand... (voir par exemple Okuda et al 1981, Suwa et al 1989, Johnson 1970, Li Jan et al 1983, Pierson 1980...). Le plus souvent, ces observations révèlent : les situations et le processus de déclenchement, le processus d'écoulement, le changement de la topographie du lit du torrent et la pente de la montagne, et enfin le processus d'arrêt de la lave. Les auteurs montrent que l'un des paramètres les plus importants dans le déclenchement de la lave torrentielle est l'intensité de la pluie. Dans tous les cas, les laves torrentielles sont observées après de longues ou de fortes pluies. L'importance de la végétation du bassin versant est également un paramètre important qui empêche la boue de se former, et donc de s'écouler en masse. Mais d'une manière générale, il est difficile de quantifier le déclenchement de ces laves.

Il est aussi intéressant, supposant que la lave s'est formée et qu'elle s'écoule dans le lit du torrent, d'évaluer l'écoulement résultant, et donc déterminer les zones successibles d'être inondées. Cela est rendu maintenant possible grâce aux informations recueillies par les nombreuses observations qui ont permis de connaître les caractéristiques générales des laves. Ce sont des écoulements transitoires, souvent décrits comme des bouffées, des écoulements de faibles ou très faibles hauteurs alternant avec des vagues d'un matériau formé de roches et de boues et hautes de plusieurs mètres, et aussi la capacité de la lave de transporter des blocs de grandes dimensions (jusqu'à plusieurs mètres de diamètre) et laisser derrière elle des particules moins grandes.

Lorsqu'on étudie la loi de comportement d'un matériau on cherche la relation entre les contraintes appliquées et les déformations qui en résultent. Un moyen permettant de comprendre ce qui se passe, et éventuellement, d'en déduire cette loi de comportement, est d'étudier les phénomènes qui se produisent au niveau microstructurel, i. e à l'échelle de

particules fluides indéformables qui peut aller de l'échelle de la molécule à l'échelle des gros blocs. Si on s'intéresse aux laves torrentielles on se heurte à de multiples problèmes dont l'origine est la composition variée des laves, qui sont des mélanges de plusieurs matériaux : matériaux solides qui apparaissent sous forme de particules, d'une certaine quantité d'eau, des débris végétaux ou animaux et parfois même de l'air. De plus, les formes géométriques, les minéraux constitutifs de chacune des particules et la structure de leurs arrangements sont variables d'une lave à l'autre et dépendent de la géologie du bassin versant duquel sont issus les matériaux, de la façon dont se forment les différents types de constituants, et aussi du mode d'initiation de la coulée.

Lors d'une déformation de tels matériaux, des interactions entre particules élémentaires ont lieu. Des liaisons se font et se défont entre particules d'argiles, des frottements ou des chocs se produisent entre grains, des molécules d'eau se déplacent, etc. Ces phénomènes contribuent tous à des dissipations d'énergie. Comment pourrions-nous donc décrire le comportement rhéologique d'un corps aussi complexe en fonction de celui de ces constituants ? Il n'y a actuellement qu'une façon : employer des modèles de structure ou des théories de structures simplifiées et valider ensuite ce modèle par les mesures rhéométriques.

Malheureusement, aucune mesure de rhéométrie sur le matériau naturel brut n'a été faite pour l'instant, compte tenu des dimensions des plus grandes particules qu'on peut trouver en général dans ces laves. Cependant, les chercheurs ont apparemment tenté progressivement de se rapprocher de cette solution idéale. Une approche consiste à étudier des mélanges grossiers à l'aide de rhéomètre à cylindre coaxiaux de grande taille (Major & Pierson 1990 et Coussot & Piau 1995a) et aussi à l'aide de rhéomètre cône-plan de grand taille (Phillips 1988, Phillips & Davies 1989-1991). Major & Pierson 1990 ont réalisé des expériences sur des mélanges prélevés sur le terrain dans des dépôts de laves où seule la fraction inférieure à 2 mm a été conservée. Le modèle qui semble le plus adapté à leurs résultats est celui de Bingham. Phillips & Davies 1991 ont réalisé des mesures sur des mélanges de dépôts de laves torrentielles dont la fraction des particules retenue est de diamètre inférieur à 15 cm. Les fluctuations sont trop importantes pour qu'une loi de comportement puisse être distinguée. D'après les auteurs cette dispersion des mesures autour d'une même valeur de contrainte est une propriété caractéristique des fluides granulaires. Les expériences de Coussot & Piau 1995a sur les dépôts de laves dont la fraction des particules retenue est de diamètre inférieur à 2 cm, montrent un comportement stable (qui obéit au modèle d'Herschel-Bulkley) lorsque les mélanges contiennent une fraction fine ($<40 \mu\text{m}$) supérieure à 20 %. Cependant un comportement instable est obtenu lorsque la fraction fine est très faible.

En ce qui concerne les modèles théoriques susceptibles d'être appliqués aux laves torrentielles, Johnson (1970) et Daido (1971) étaient parmi les premiers à proposer le modèle viscoplastique de Bingham. Leur argument est qu'on a affaire à une masse de roches et d'argiles mélangée à de l'eau, qui est donc un comportement intermédiaire entre un sol classique respectant un critère de Coulomb et celui d'un fluide visqueux ayant un comportement Newtonien. Dans la suite, pour prendre en compte les interactions entre particules Johnson & Rodine 1984 ont suggéré d'ajouter un terme de contrainte dont l'origine est le travail de Mc-Tigue sur les écoulements granulaires. D'autre part, Takahashi (1978-1980-1981) a proposé d'appliquer au cas des laves torrentielles, le modèle de Bagnold pour décrire le comportement de mélange d'un fluide et de particules. En outre, O'Brien & Julien 1985 proposent d'appliquer aux laves torrentielles peu visqueuses où la turbulence joue un rôle essentiel, leur modèle rhéologique. Ce modèle combine différentes dissipations : cohésion entre particules, friction et frottement visqueux entre le fluide et les particules, impact des particules et turbulence.

Dans certains cas, les modèles sans seuil ont donné des résultats satisfaisants dans la détermination des hydrographes de l'écoulement (Pierson et al 1990, Takahashi 1980-1991, Arattano & Savage 1992-1994). Le fluide dilatant sans seuil est celui de Bagnold ($n = 2$) mais sans tenir compte du comportement Newtonien aux faibles gradients de vitesses. Ce modèle a également donné des résultats satisfaisants dans la détermination des hydrographes de l'écoulement de mélanges eau/sable hyperconcentrés (Takahashi 1980-1991). Mais, Takahashi (1980) estime qu'un autre modèle devient nécessaire si le mélange contient une fraction importante d'argile. Dans ce cas, les mesures rhéométriques de Coussot & Piau 1995a sur des argiles montrent pour différents mélanges que l'indice de rhéofluidification n varie dans une gamme restreinte et reste inférieur à 0,5. Coussot estime que la valeur 1/3 donne des résultats satisfaisants dans l'étude des écoulements uniformes (Coussot 1994) et non permanent (Laigle & Coussot 1997).

Nous retenons en définitive que le modèle d'Herschel-Bulkley est le modèle le plus approprié pour l'étude des laves torrentielles au moins lorsque la fraction fine du mélange ($<40 \mu\text{m}$) est supérieure à 20 % (Coussot 1992, Coussot & Piau 1995a-b) et que le mélange peut être considéré comme un fluide homogène et rhéofluidifiant. L'addition des particules de sable ne change pas trop les propriétés rhéologiques à moins que la concentration de celles-ci dépasse 20% (O'Brien & Julien 1988).

Nous considérons exclusivement dans ce chapitre un modèle d'Herschel-Bulkley. Il serait également intéressant de tenir compte de l'évolution au cours du temps de la viscosité et du seuil de contrainte (comportement thixotopie) en utilisant une loi cinétique appropriée, et aussi de tenir compte du comportement élastique du mélange avant le seuil de contrainte. Mais compte tenu de l'état actuel de connaissances ces objectifs doivent être considérés des perspectives pour le futur.

L'étude réalisée est originale du fait que :

- Nous considérons un problème assez proche de l'écoulement naturel des boues où une quantité finie du fluide est mise en mouvement tout d'un coup. D'autre part, le problème est assez simple et il peut être aussi utilisé pour évaluer la consistance de plusieurs matériaux impliqués dans de nombreux procédés industriels (produits alimentaires et cosmétiques, béton...).
- Notre analyse est basée sur un modèle formel (Herschel-Bulkley) qui représente assez bien les mesures rhéométriques dans une large gamme de gradient de vitesse. Le modèle représente également plusieurs d'autres matériaux tels que les peintures, les encres, les mélanges eau-argiles, les mélanges eau-charbons, les produits alimentaires, les vases, les boues des coulées sous-marines, le charbon liquide, les boues résiduaires, les boues de forage, etc.
- Nous tenons en compte, des contraintes élongationnelles susceptibles d'expliquer quelques phénomènes inconnus en hydraulique classique. Nous tenons également compte du phénomène du glissement qui n'a jamais encore, à notre connaissance, été évoqué dans ce problème d'écoulement gravitaire à surface libre.
- Nous analysons le problème sur deux plans, théorique et expérimental. On dégagera les mécanismes du seuil et de la rhéofluidification.

Nous commençons le chapitre par l'étude théorique. Nous proposons ici un ensemble de solutions analytiques. Nous dégageons dans un premier temps l'influence des effets élongationnels dans le régime inertiel lorsque le canal est horizontal. Nous montrons ici que ce type de matériaux ne coule pas si la profondeur initiale du fluide est inférieure à une certaine valeur critique. Ceci permet de retrouver un problème classique de la mécanique des sols, la rupture des talus verticaux. Nous aborderons ensuite le reste du problème de façon simplifiée, en négligeant les effets des contraintes normales. On réussira dans ces conditions à caractériser le régime visqueux, puis le régime à dominance inertiel et l'état d'équilibre. A la fin de ce chapitre, nous discuterons nos mesures compte tenu des apports de la théorie et nous

conclurons. En annexe, nous proposons un modèle qui tient compte du phénomène de glissement observé lors de nos expériences avec le Carbopol dans un canal lisse.

Comme dans le chapitre III, signalons que le texte qui suit a été dépouillé au maximum des développements mathématiques.

I.2 Théorie de l'eau peu profonde pour les fluides viscoplastiques

Le traitement théorique des écoulements à surface libre des fluides complexes, analytique ou numérique, est très rare dans la littérature. Mais il existe (voir les chapitres précédents) un certain nombre d'études sur les écoulements à surface libre avec un modèle Newtonien, motivé par des raisons scientifiques et techniques. Néanmoins, depuis quelques années les efforts de quelques équipes (Johnson et al, Takahashi et al, Coussot et al, O'Brien et al, Liu et al, Huang et al, Piau et al, Arattano et al...) ont permis de progresser dans cette voie. Une préoccupation est de savoir dans quelles conditions les modèles classiques basés sur l'hypothèse d'eau peu profonde peuvent être appliqués aux écoulements de laves torrentielles. A l'exception de Piau (1996), les chercheurs se sont contentés d'appliquer les approximations de l'hydraulique classique (qui suppose une répartition de pression hydrostatique), et traite les écoulements variés dans l'approximation locale du frottement uniforme. On peut également distinguer parmi les théories :

- Ceux qui utilisent des modèles viscoplastiques : Johnson (1970), O'Brien (1986), Liu & Mei (1989-1990), Van Kessel & Kranenburg (1996), Huang & Garcia (1997) en utilisant le modèle de Bingham, et Coussot (1994), Laigle & Coussot (1997), Coussot & al (1996), Piau (1996), Huang & Garcia (1998) en utilisant le modèle d'Herschel-Bulkley.
- Ceux qui utilisent le modèle de Bagnold (s'appliquent aux laves torrentielles granulaires) : Takahashi (1980-1991).
- Et ceux qui utilisent des modèles qui combinent différentes dissipations, frottement solide, comportement Newtonien ou autres et turbulence (concernent les laves torrentielles peu visqueuses où la turbulence joue un rôle essentiel) : O'Brien et Julien 1993.

Considérons une situation où une quantité donnée d'un fluide viscoplastique est maintenue en repos derrière un mur vertical. Si le mur s'effondre et la profondeur du fluide est inférieure à une valeur critique, la mécanique des sols nous informe que le fluide reste en équilibre. Il est cependant impossible d'expliquer ce phénomène sans tenir compte des contraintes normales. Cette considération limite évidemment le domaine de validité de l'ensemble des modèles théoriques qui supposent que la répartition de pression est hydrostatique. Pour remédier à cet inconvénient, Takahashi (1991) propose d'établir le critère de démarrage de la masse de

matériaux sur une pente quelconque en supposant que c'est la totalité de la masse qui se met en mouvement au départ en glissant sur le fond fixe. Il s'agit alors d'un phénomène de rupture analogue à celui qui est envisagé dans les problèmes de mécanique des sols. En outre, pour expliquer ce phénomène et le phénomène d'arrêt de la lave, Arattano & Savage (1992) de leur côté, supposent l'existence d'une profondeur critique, au-dessous de laquelle le fluide est en équilibre. On peut cependant s'interroger sur la validité d'une théorie qui suppose l'existence d'une limite entre deux situations différentes. En revanche, le modèle théorique de Piau (1996) présente le grand avantage d'expliquer ce phénomène qui est dû à l'influence non négligeable des contraintes élongationnelles. Ces effets ne se manifestent pas uniquement au démarrage, mais aussi bien au cours de l'écoulement et lors de l'arrêt. Nous rappelons que ce modèle de Piau a été obtenu après une analyse d'ordre de grandeur établie sur les équations bidimensionnelles du mouvement (en utilisant le modèle d'Herschel-Bulkley) faisant à la fin apparaître l'influence incontestable des contraintes élongationnelles dues au seuil de contrainte. C'est la raison pour laquelle notre étude était dès le départ basée sur ce modèle et nous allons dans ce chapitre poursuivre encore cette voie.

Ainsi, l'équation de base à considérer ici est celle de Piau (1996) qui exprime l'équilibre entre les forces de pesanteur, de frottement, d'inertie et les contraintes élongationnelles. Ces dernières peuvent être représentées par un paramètre de forme ϕ supposé constant pour une situation d'écoulement donnée.

$$\text{Eq. IV-1} \quad U_{,t} + \beta U U_{,x} + \left(g \cos(\alpha) + \frac{s\phi b}{\rho S} \text{sgn}(h_{,x}) \right) h_{,x} = g(\sin(\alpha) - J) + 0 (\varepsilon^2) \quad (1)$$

s est le seuil de contrainte et $\text{sgn}(h_{,x})$ représente le signe de la pente de la surface libre (positif, négatif ou nul), compté positif si la profondeur du fluide croît suivant la direction (Ox). Les autres paramètres sont déjà définis dans le chapitre III.

Dans le cas de l'écoulement graduellement varié, la valeur du paramètre de forme ϕ est d'environ 1.5 (voir chapitre II). Nous supposons que cette valeur reste la même dans ce problème de rupture de barrage.

D'autre part, l'équation de conservation de la masse s'exprime pour un canal rectangulaire :

$$\text{Eq. IV-2} \quad h_{,t} + U h_{,x} + h U_{,x} = 0 \quad (2)$$

Pour finir, il convient de rajouter à ces deux équations les relations générales qui lient les différentielles locales aux dérivées partielles :

$$\text{Eq. IV-3} \quad dU = U_{,x} dx + U_{,t} dt \quad (3)$$

$$\mathbf{q. IV-4} \quad dh = h_{,x} dx + h_{,t} dt \quad (4)$$

I.2.1 Nature des équations du mouvement (cf. Piau 1996)

Le système d'équations ((1), (2), (3) et (4)) est en $U_{,t}, h_{,t}, U_{,x}, h_{,x}$. En introduisant la variable a :

$$\text{Eq. IV-5} \quad a = \begin{cases} \left(gh \cos(\alpha) + \frac{\varphi s}{\rho} \operatorname{sgn} h_{,x} \right)^{1/2} & \text{si } h \geq \frac{-\varphi s}{\rho g \cos(\alpha)} \operatorname{sgn} h_{,x} \\ \left(-gh \cos(\alpha) - \frac{\varphi s}{\rho} \operatorname{sgn} h_{,x} \right)^{1/2} & \text{si } h \leq \frac{-\varphi s}{\rho g \cos(\alpha)} \operatorname{sgn} h_{,x} \end{cases} \quad (5)$$

qui a les dimensions d'une vitesse, on montre que le déterminant principal est nul si :

$$\text{Eq. IV-6} \quad \frac{dx}{dt} = U + a(w \mp (w^2 + 1)^{1/2}) \quad \text{et} \quad h \geq h_\varphi = \frac{-\varphi s}{\rho g \cos(\alpha)} \operatorname{sgn}(h_{,x}) \quad (6)$$

où :

$$\text{Eq. IV-7} \quad w = \frac{(\beta - 1)U}{2a} \quad (7)$$

Supposons maintenant $\beta = 1$ et que $h \geq h_\varphi$. La deuxième condition pour que notre système d'équations soit indéterminé est que le déterminant obtenu en remplaçant une colonne quelconque du déterminant principal par le second membre du système est nul, il résulte :

$$\text{Eq. IV-8} \quad \frac{dU}{dt} \mp \frac{2a^2}{a^2 - \frac{\varphi s}{\rho} \operatorname{sgn} h_{,x}} \frac{da}{dt} = g(\sin(\alpha) - J) \quad (8)$$

Afin de simplifier l'écriture de cette équation, on introduit la variable r :

$$\text{Eq. IV-9} \quad r(a) = a \left(\frac{\rho}{\varphi s} \right)^{1/2} \quad (9)$$

En cherchant maintenant une fonction $f(r)$ telle que :

$$\text{Eq. IV-10} \quad \mp \frac{2r^2}{r^2 - \operatorname{sgn} h_{,x}} \frac{da}{dt} = \frac{d(\mp 2a(1 - r^{-1}f(r)))}{dt} \quad (10)$$

On aboutit à une équation différentielle du premier ordre dont la solution dépend du signe de $h_{,x}$, soit :

$$\text{Eq. IV-11} \quad f(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{r+1}{r-1} \right) = \operatorname{arg} \operatorname{coth}(r) & \text{si } \operatorname{sgn}(h_{,x}) = 1 \\ f(r) = \operatorname{arctg}(r) & \text{si } \operatorname{sgn}(h_{,x}) = -1 \end{cases} \quad (11)$$

La forme canonique du système ((1), (2), (3) et (4)) s'écrit donc :

$$\text{Eq. IV-12} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d(U \mp 2a(1 - r^{-1}f(r)))}{dt} = g(\sin(\alpha) - J) \\ \text{Le long de :} \\ \frac{dx}{dt} = U \mp a \end{array} \right. \quad (12)$$

Cela seulement si $h \geq h_p$. Nous interprétons dans la suite cette propriété des fluides à seuil de contrainte.

1.2.2 Evaluation de la pente de frottement J

L'écoulement est supposé laminaire et on considère ici que le glissement est nul. On suppose également que la profondeur du fluide varie progressivement de telle sorte que la contrainte tangentielle moyenne à la paroi dans une section quelconque égale à la contrainte à la paroi de l'écoulement uniforme ayant les mêmes valeurs du débit et de la hauteur (approximation locale du frottement de l'hydraulique classique). Ainsi, voir le chapitre sur les écoulements uniformes, pour un modèle d'Herschel-Bulkley, J peut être représentée par la formule implicite suivante :

$$\text{Eq. IV-13} \quad J = \frac{k}{2\rho g} \frac{\alpha(n, Od = 0, \text{forme de } S)}{g\left(n, Od = \frac{4s}{\rho g D_H |J|}, \text{forme de } S\right)} \left(\frac{|U|^{n-1}}{D_H^{n+1}} \right) U \quad (13)$$

Pour une section rectangulaire large ($D_H = 4h$), on a :

$$\text{Eq. IV-14} \quad \alpha(n) = 2^{2n+3} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n ; \quad g(n, Od) = \left(1 - Od\right) \left(1 - \frac{1}{1+n} Od - \frac{n}{(1+n)} Od^2\right)^n \quad (14)$$

On vérifie dans ce cas que :

$$\text{Eq. IV-15} \quad q_v = Uh = \frac{h^{m+2}}{(m+2)(m+1)} \left(\frac{\rho g}{k}\right)^m J |J|^{m-1} \left(1 - \frac{s}{\rho g h |J|}\right)^{m+1} \left(m + 1 + \frac{s}{\rho g h |J|}\right) \quad (15)$$

Si $s = 0$ et $n \neq 1$, i. e la loi de puissance, l'Eq. IV-13 se simplifie comme suit :

$$\text{Eq. IV-16} \quad J = \frac{k}{\rho g} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{|U|^{n-1}}{h^{n+1}}\right) U \quad (16)$$

Lorsque $n = 1$, on retrouve bien le cas Newtonien étudié précédemment. Pour tenir compte du caractère transitoire de l'écoulement, nous changerons dans la suite la définition du nombre d'Oldroyd 'Od'.

I.3 Solution de Ritter généralisée pour les fluides à seuil de contrainte

Reprenons pour cela les variables adimensionnelles déjà utilisées dans le cas Newtonien (désignées par le signe *).

$$\text{Eq. I-17} \quad (C^*, U^*, x^*, t^*) = \left(\frac{C}{\sqrt{gH}}, \frac{U}{\sqrt{gH}}, \frac{x}{H}, \frac{t}{\sqrt{H/g}} \right) \text{ avec } C = \sqrt{gh} \quad (17)$$

Considérons un canal horizontal et la condition initiale de l'écoulement . Lorsqu'on néglige le frottement visqueux, l'Eq. IV-1 devient en fonction du couple ($C = \sqrt{gh}, U$) :

$$\text{Eq. I-18} \quad \frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + 2C^* \left(1 - \frac{\phi}{C^{*2}} \right) \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = 0 \quad (18)$$

Le coefficient β est pris par simplification égal à 1. Le nombre adimensionnel $\phi = (s\varphi / (\rho gH))$ a été introduit.

L'équation de continuité est :

$$\text{Eq. I-19} \quad 2 \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + 2U^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} + C^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} = 0 \quad (19)$$

En introduisant maintenant la variable $\eta = x^* / t^*$ et en supposant l'existence d'une solution de la forme :

$$\text{Eq. I-20} \quad C^* = C^*(\eta) \quad \text{et} \quad U^* = U^*(\eta) \quad (20)$$

En outre, on suppose l'existence d'une onde négative d'abscisse $x^* = x_b^*$ (ou $\eta^* = \eta_b^*$) qui se propage dans le réservoir vers l'amont. A cette abscisse la profondeur du fluide égale à la profondeur initiale, et la vitesse est nulle, soit :

$$\text{Eq. I-21} \quad C^*(\eta = \eta_b) = 1 \quad \text{et} \quad U^*(\eta = \eta_b) = 0 \quad (21)$$

En remplaçant maintenant l'hypothèse (Eq. I-20) dans les équations du mouvement (Eq. I-18 et Eq. I-19), il vient respectivement :

$$\text{Eq. I-22} \quad \begin{cases} (U^*(\eta) - \eta) \frac{dU^*(\eta)}{d\eta} + 2C^*(\eta) \left(1 - \frac{\phi}{C^{*2}(\eta)} \right) \frac{dC^*(\eta)}{d\eta} = 0 \\ 2(U^*(\eta) - \eta) \frac{dC^*(\eta)}{d\eta} + C^*(\eta) \frac{dU^*(\eta)}{d\eta} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

ou bien :

$$\text{Eq. I-23} \quad \begin{cases} \left[C^*(\eta)^2 - \phi - (U^*(\eta) - \eta)^2 \right] \frac{dC^*(\eta)}{d\eta} = 0 & (a) \\ \frac{dU^*(\eta)}{d\eta} = -2 \left(\frac{U^*(\eta) - \eta}{C^*(\eta)} \right) \frac{dC^*(\eta)}{d\eta} & (b) \end{cases} \quad (23)$$

Supposons que $dC^*/d\eta \neq 0$ et que $U^*(\eta) \geq \eta$, il vient d'après l'Eq. I-23a :

$$\text{Eq. I-24} \quad U^*(\eta) = \eta + \sqrt{C^*(\eta)^2 - \phi} \quad (24)$$

qui montre qu'on devrait avoir $\forall \eta \quad C^*(\eta) \geq \sqrt{\phi}$. En remplaçant $\eta = \eta_b$ dans l'Eq. I-24 et compte tenu des conditions (Eq. I-21), on obtient :

$$\text{Eq. I-25} \quad \eta_b = \frac{dx_b^*}{dt^*} = -\sqrt{1 - \phi} \quad (25)$$

Cette expression représente la vitesse de l'onde négative qui reste comme dans la solution de Ritter constante, mais dans ce cas les contraintes élongationnelles (représentées par le nombre adimensionnel ϕ) diminuent la valeur de la vitesse de l'onde.

En remplaçant l'Eq. I-24 dans l'Eq. I-23b, on obtient une équation différentielle de premier ordre qui a une solution implicite, soit :

$$\text{Eq. I-26} \quad \eta = 2\sqrt{\phi} \left[\ar \cos \left(\frac{\sqrt{\phi}}{C^*(\eta)} \right) - \ar \cos(\sqrt{\phi}) \right] - 3\sqrt{C^{*2}(\eta) - \phi} + 2\sqrt{1 - \phi} \quad (26)$$

D'autre part, puisque $\forall \eta \quad C^*(\eta) \geq \sqrt{\phi}$, la condition en aval exprimant que la profondeur du fluide est nulle à l'abscisse du front d'onde, n'est pas vérifiable dans le cas des fluides à seuil de contrainte. On est amené alors à définir une hauteur critique $h^* = \phi$ d'abscisse $x^* = x_f^*$ ($\eta = \eta_f$) au-dessous de laquelle l'Eq. I-26 et l'Eq. I-24 ne sont pas valables. Compte tenu de l'Eq. I-23, il convient de prendre lorsque $\eta = \eta_f$, $C^* = \sqrt{\phi}$ et $U^* = U_f^* = \eta_f$, qui représente la vitesse du front d'onde, peut être déduite à partir de l'Eq. I-26 en remplaçant $\eta = \eta_f$ et $C^*(\eta_f) = \sqrt{\phi}$, soit :

$$\text{Eq. I-27} \quad \eta_f = 2\sqrt{1 - \phi} - 2\sqrt{\phi} \ar \cos(\sqrt{\phi}) \quad (27)$$

Cette solution prédit donc un profil d'écoulement qui varie entre $\eta = \eta_b$ et $\eta = \eta_f$ comme l'Eq. I-26 et elle permet de retrouver la propriété des fluides plastique (comme le cas des sols) de couler en formant un talus amont. La valeur de ϕ est a priori inconnue. Néanmoins,

elle peut être calculée séparément de l'écoulement sur des bases relatives à la statique des talus.

Le problème est ainsi défini. On représente alors sur la Fig. I-1 la fonction $h^*(\eta)$ qui donne le profil de la surface libre. On retrouve bien la solution de Ritter lorsque $\phi = 0$. On remarque comment les contraintes élongationnelles peuvent changer le profil de l'écoulement, qui se caractérise essentiellement par l'apparition d'une discontinuité de la profondeur du fluide à l'abscisse du front. Notons également, et ceci représente une propriété des fluides à seuil, qu'il n'y aura un écoulement que si $H > (s\phi / (\rho g))$, i.e $\phi < 1$.

I.4 Etat d'équilibre statique

L'une des propriétés des fluides viscoplastiques est leur arrêt local et instantané lorsque les contraintes mises en jeu sont inférieures à un seuil ($\sqrt{-T_{II}} \leq s$ dans notre cas où T_{II} est le deuxième invariant du tenseur des contraintes), cela évidemment dans l'hypothèse de non-glissement à la paroi. Dans ce cas, le tenseur des taux de déformations D devient nul et le fluide devrait donc s'arrêter. La théorie d'arrêt au seuil d'équilibre statique a jusqu'ici été développée en reproduisant l'approximation de l'hydraulique classique avec frottement pariétal: l'écoulement s'arrête lorsque la pente de la surface libre atteint une valeur limite (Liu & Mei 1989-1994, Coussot & Proust 1996, Coussot et al 1996) ou plus exactement lorsque la valeur maximale de la contrainte tangentielle atteint le seuil d'écoulement (seuil de contrainte). Cette théorie suppose que l'arrêt d'écoulement se fait d'une manière progressive et elle ne fait pas apparaître l'influence de l'indice de rhéofluidification. Nous réexaminerons d'abord cette théorie en incluant les effets des contraintes élongationnelles et nous proposerons dans la suite une autre théorie qui donne un arrêt instantané de l'écoulement et qui fait apparaître l'influence de l'indice de rhéofluidification. Cette nouvelle théorie peut être une perspective très utile pour les recherches à venir.

On est dans le cas d'arrêt au seuil d'équilibre statique lorsque (Eq. I-44):

$$\text{Eq. I-28} \quad -h_{,x} + \frac{s\phi}{\rho gh} h_{,x} = \frac{s}{\rho gh} \quad (28)$$

Cela dans l'hypothèse où le glissement est nul.

En divisant les hauteurs par H et les abscisses par L , on fait apparaître deux nombres adimensionnels : le nombre d'Oldroyd 'Od' (il traduit l'influence du seuil de contrainte) et le nombre ϕ (traduit l'influence des contraintes élongationnelles), soit respectivement :

$$\text{Eq. I-29} \quad Od = \frac{s}{\rho g H} \frac{L}{H} \quad ; \quad \phi = \frac{\phi s}{\rho g H} \quad (29)$$

En désignant \hat{h}_{stop} le profil de l'écoulement à l'équilibre et \hat{x}_{fstop} l'abscisse du front d'onde lors de l'arrêt, il vient après intégration de l'Eq. I-28 :

$$\text{Eq. I-30} \quad \phi \hat{h}_{stop} - \frac{\hat{h}_{stop}^2}{2} = Od \hat{x} + C \quad (30)$$

L'examen de l'Eq. I-30 montre qu'on devrait dans tous les cas avoir $\hat{h}_{stop} \geq \phi$, ce qui nous amène à définir, comme dans le cas inertiel, une profondeur non nulle à l'abscisse du front d'onde, soit $\hat{h}_{stop}(\hat{x} = \hat{x}_{stop}) = \phi$ avec $\lambda \geq 1$. La valeur de ϕ peut être évaluée en mesurant la profondeur limite de H ($H_c = (\phi s)/(\rho g)$) au-dessous de laquelle le fluide dans le réservoir ne bouge pas.

La constante C intervenant dans l'Eq. I-30 peut être déterminée avec la condition $\hat{h}_{stop}(\hat{x} = \hat{x}_{stop}) = \phi$, il résulte :

$$\text{Eq. I-31} \quad \hat{h}_{stop} = \phi + \sqrt{2Od(\hat{x}_{fstop} - \hat{x})} \quad (31)$$

Compte tenu de nos résultats expérimentaux, nous devons évoquer deux situations : L'arrêt d'effondrement et l'arrêt d'écoulement.

Arrêt d'effondrement

On suppose ici qu'une partie du fluide, située en amont, reste en équilibre à la hauteur initiale H. Il est possible alors de définir dans ce cas une position arrière $\hat{x} = \hat{x}_{bstop}$, telle que pour $\hat{x} \leq \hat{x}_{bstop}$, $\hat{h}_{stop}(\hat{x}) \approx 1$, alors que entre $\hat{x} = \hat{x}_{bstop}$ et $\hat{x} = \hat{x}_{fstop}$, la profondeur varie comme

l'Eq. I-31. Pour déterminer \hat{x}_{bstop} et \hat{x}_{fstop} , on doit vérifier les deux expressions suivantes :

$$\int_{\hat{x}_{bstop}}^{\hat{x}_{fstop}} \hat{h}_{stop} d\hat{x} = -\hat{x}_{bstop} \quad \text{et} \quad \hat{h}_{stop}(\hat{x} = \hat{x}_{bstop}) = 1$$

La première traduit la conservation du volume. Compte tenu de l'Eq. I-31, il résulte :

$$\text{Eq. I-32} \quad \hat{x}_{bstop}(Od, \phi) = -\frac{1}{3Od}(1-\phi) \left[1 - \frac{1}{2}\phi(\phi+1) \right] \quad (32)$$

$$\text{Eq. I-33} \quad \hat{x}_{fstop}(Od, \phi) = \frac{1}{6Od}(1-\phi) [1 - \phi(2-\phi)] \quad (33)$$

Pour que cette solution soit valable, il faut que $\hat{x}_{b_{stop}} \geq -1$. Compte tenu de l'Eq. I-32, on devrait donc avoir :

$$\text{Eq. I-34} \quad Od \geq Od_c \quad \text{où} \quad Od_c = \frac{1}{3}(1-\phi) \left[1 - \frac{1}{2}\phi(\phi+1) \right] \quad (34)$$

Arrêt d'écoulement

Si $Od < Od_c$, tout le contour du réservoir s'écoule. Le profil de la surface libre reste toujours décrit par l'Eq. I-31, mais dans ce cas la profondeur du fluide varie entre $\hat{x} = -1$ et $\hat{x} = \hat{x}_{f_{stop}}$ et la conservation du volume exprime :

$$\int_{-1}^{\hat{x}_{f_{stop}}} \hat{h}_{stop} d\hat{x} = \frac{V_0}{HL} = 1$$

où V_0 est le volume initial dans le réservoir (= HL dans notre cas)

On définit $\hat{h}_{0_{stop}}$ comme étant la profondeur du fluide à $\hat{x} = -1$ lors de l'arrêt, on obtient compte tenu de l'Eq. I-31 :

$$\text{Eq. I-35} \quad \frac{1}{3}\hat{h}_{0_{stop}}^3 - \frac{\phi}{2}\hat{h}_{0_{stop}}^2 + \frac{1}{6}\phi^3 - Od = 0 \quad (35)$$

Pour simplifier plus cette expression, on introduit les paramètres suivants :

$$\text{Eq. I-36} \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{h}_{0_{stop}}}{\phi} - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{3Od\hat{V}_0}{\phi^3} - \frac{1}{4} \quad (36)$$

L'Eq. I-35 peut être alors réécrite comme suit :

$$\text{Eq. I-37} \quad H_0^3 - \frac{3}{4}H_0 - \omega = 0 \quad (37)$$

A l'aide des formules de Cardan, il est possible de trouver la solution exacte de cette dernière équation, mais pour simplifier, nous chercherons ici une solution approximative. Si $\omega \gg 1$ ($\phi \ll 1$), on a :

$$\text{Eq. I-38} \quad H_0 \approx \omega^{1/3} \quad \text{ou} \quad \hat{h}_{0_{stop}} \approx \frac{1}{2}\phi + \left[3Od - \frac{1}{4}\phi^3 \right]^{1/3} \quad (38)$$

L'abscisse du front lors de l'arrêt peut être déterminé en remplaçant dans l'Eq. I-31

$\hat{h}_{stop} = \hat{h}_{0_{stop}}$ et $\hat{x} = -1$, soit :

$$\text{Eq. I-39} \quad \hat{x}_{f_{stop}}(Od, \phi) = \frac{1}{2Od} \left[\left(\hat{h}_{0_{stop}} - \phi \right)^2 \right] - 1 \quad (39)$$

Lorsque $\phi \ll 1$, $\hat{x}_{f_{stop}}$ peut être approchée comme suit :

$$\text{Eq. I-40} \quad \hat{x}_{f_{stop}} \approx \frac{1}{2Od} \left[\left(3Od - \frac{1}{4}\phi^3 \right)^{1/3} - \frac{1}{2}\phi \right]^2 - 1 \quad (40)$$

On vérifie que l'état d'équilibre est ainsi caractérisé.

Enfin, en négligeant les effets des contraintes élongationnelles $\phi = 0$, on obtient les lois suivantes :

$$\text{Eq. I-41} \quad \hat{x}_{f_{stop}} = \begin{cases} \frac{1}{6Od} & \text{si } Od \geq 1/3 \\ \frac{3^{2/3}}{2Od^{1/3}} - 1 & \text{si } Od \leq 1/3 \end{cases} \quad (40)$$

Dans la suite de l'analyse, nous aborderons le problème d'une manière simplifier en supposant que les effets des contraintes élongationnelles sont négligeables (c.a.d $\phi = 0$)

I.5 Théorie viscoplastique et état d'équilibre dynamique

Après la phase inertielle, les phénomènes viscoplastiques deviennent prédominants devant l'inertie et le premier terme de l'équation du mouvement (Eq. IV-1) disparaît. Il résulte dans le cas horizontal et en supposant que $\text{sgn}(h_{,x}) = -1$:

$$\text{Eq. I-42} \quad \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{s\phi}{\rho gh} \frac{\partial h}{\partial x} = -J \quad (41)$$

Comme dans le cas inertiel, cette expression montre lorsque $H \leq (s\phi / (\rho g))$, que le fluide reste en équilibre même après la rupture de barrage.

En introduisant l'Eq. I-42 dans l'Eq. IV-15 et compte tenu de l'équation de continuité, on aboutit à une équation fortement non-linéaire en fonction de h seulement, soit :

$$\text{Eq. I-43} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\rho g}{k} \right)^m \frac{h^{m+2}}{(m+2)(m+1)} J |J|^{m-1} \left(1 - \frac{s}{\rho gh |J|} \right)^{m+1} \left(m+1 + \frac{s}{\rho gh |J|} \right) \right] = 0 \quad (42)$$

avec

$$\text{Eq. I-44} \quad J = - \left(1 + \frac{s\phi}{\rho gh} \text{sgn}(h_{,x}) \right) h_{,x} \quad \text{et que } |J| \leq \frac{s}{\rho gh} \quad (43)$$

L'inégalité intervenant dans l'Eq. I-44 est une relation imposée sur l'écoulement. C'est une liaison interne qui empêche l'écoulement d'être quelconque, mais qui ne participe pas au dit mouvement lui-même.

Malheureusement, sous cette forme générale, ces équations ne donnent pas des solutions analytiques simples. Néanmoins, il est convenable, sous certaines conditions, d'introduire

quelques hypothèses simplificatrices et de chercher ainsi des solutions approximatives.

Remarquons d'abord que l'équation () donne le débit en fonction de la perte de charge, c'est une équation implicite que dans le cas général n'a pas de solution analytique exacte. Il est plus avantageux, dans notre analyse, d'avoir une relation qui donnerai la perte de charge en fonction de la vitesse moyenne. La solution cependant existe qui consiste à supposer que les effets visqueux dominant les effets plastiques, on pose pour cela :

$$\text{Eq. I-45} \quad T_s = \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{k(U/h)^n}{s} \quad (\text{I-0})$$

Ainsi, lorsque $T_s \gg 1$ l'équation () donne l'expression suivante :

$$\text{Eq. I-46} \quad \frac{\rho g h J}{s} \approx T_s + 1 \quad (\text{I-0})$$

On remarque aussi que cette approximation reste valable pour décrire le phénomène d'arrêt de l'écoulement.

En négligeant les effets des contraintes élongationnelles, la pente de frottement J s'écrit comme suit (voir équation ()) :

$$\text{Eq. I-47} \quad J = -h_{,x} \quad (\text{I-0})$$

On reproduit maintenant l'approximation classique de l'hydraulique qui consiste à supposer que la vitesse moyenne dans l'ensemble de l'écoulement est quasiment constante et égale à la vitesse du front. Pour tenir compte, dans notre cas, de la non répartition uniforme de la vitesse moyenne, on corrige la vitesse par un coefficient correcteur λ . Cette approximation est basée sur des considérations relatives à la région frontale, mais on montre qu'elle reste également valable pour décrire l'ensemble des lois globales d'écoulement. On suppose donc que :

$$\text{Eq. I-48} \quad U = \lambda U_f \quad (\text{I-0})$$

En remplaçant dans l'équation (), il vient :

$$\text{Eq. I-49} \quad \frac{\rho g h^{n+1}}{\left(\frac{2n+1}{n} \right)^n k (\lambda U_f)^n + s h^n} \partial h = -\partial x \quad (\text{I-0})$$

Pour simplifier plus les écritures, on introduit les variables adimensionnelles suivantes convenables pour les régimes d'écoulement viscoplastiques :

$$\left(\hat{h}, \hat{x}, \hat{t}, \hat{U}_f, Od \right) = \left(\frac{h}{H}, \frac{x}{L}, \frac{t}{T}, \frac{T U_f}{L}, \frac{sL}{\rho g H^2} \right)$$

Avec :

$$T = \left(\frac{2n+1}{n} \right) (2+2n)^{1/n} \left(\frac{k}{\rho g H} \right)^{1/n} \left(\frac{L}{H} \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (22)$$

En posant :

$$\chi = \frac{2(n+1)}{(\lambda \hat{U}_f)^n} \quad (22)$$

l'équation () devient :

$$\text{Eq. I-50} \quad \frac{\chi \hat{h}^{n+1}}{1 + \chi Od \hat{h}^n} \partial \hat{h} = -\partial \hat{x} \quad (I-0)$$

Cette équation peut être intégrée pour plusieurs valeurs de n. On obtient pour un modèle de Bingham (n=1) et la condition $\hat{h}(\hat{x} = \hat{x}_f) = 0$, l'équation suivante :

$$\text{Eq. I-51} \quad \frac{1}{2Od} \hat{h}^2 - \frac{1}{\chi Od^2} \hat{h} + \frac{1}{\chi^2 Od^3} \ln(1 + \chi Od \hat{h}) = \hat{x}_f - \hat{x} \quad (I-0)$$

Mais compte tenu de notre hypothèse de départ qui revient à dire que $\chi Od \ll 1$, on peut encore simplifier plus l'équation (), il vient à l'ordre de $(\chi Od)^2$:

$$\text{Eq. I-52} \quad \chi (\hat{h}^{n+1} - \chi Od \hat{h}^{2n+1}) \partial \hat{h} = -\partial \hat{x} \quad (I-0)$$

Sous cette forme elle peut être intégrée facilement. On obtient avec la condition au front $\hat{h}(\hat{x} = \hat{x}_f) = 0$:

$$\text{Eq. I-53} \quad \chi \left(\frac{\hat{h}^{n+2}}{n+2} - \frac{\chi Od \hat{h}^{2n+2}}{2n+2} \right) = \hat{x}_f - \hat{x} \quad (I-0)$$

Compte tenu des conditions aux limites du problème, nous devons évoquer deux situations : L'effondrement, valable pour un réservoir infiniment long ou pour un réservoir limité aux temps petits, et l'étalement du fluide.

1.5.1 L'écoulement jusqu'au blocage du fluide

On suppose ici qu'une partie du fluide, située en amont, reste en équilibre à la hauteur initiale H. Il sera donc possible de définir dans ce cas une position arrière $\hat{x} = \hat{x}_b$, telle que pour $\hat{x} \leq \hat{x}_b$, $\hat{h}(\hat{x}) = 1$, alors que pour $\hat{x} \geq \hat{x}_b$ et $\hat{x} \leq \hat{x}_f$, la profondeur varie comme l'équation (). Pour déterminer \hat{x}_b et \hat{x}_f , on doit vérifier simultanément les deux expressions suivantes :

$$\hat{h}(\hat{x} = \hat{x}_b) = 1$$

$$\int_{\hat{x}_b}^{\hat{x}_f} \hat{h} d\hat{x} = -\hat{x}_b$$

En remplaçant $\hat{h}(\hat{x} = \hat{x}_b) = 1$ dans l'équation (), il vient :

$$\text{Eq. I-54} \quad \lambda \left(\frac{1}{n+2} - \frac{\lambda Od}{2n+2} \right) = \hat{x}_f - \hat{x}_b \quad (\text{I-0})$$

et l'équation () donne :

$$\text{Eq. I-55} \quad \lambda \left(\frac{\lambda Od}{2n+3} - \frac{1}{n+3} \right) = \hat{x}_b \quad (\text{I-0})$$

L'examen des deux équations () et () montre qu'il existe λ seulement si :

$$\hat{x}_f - \hat{x}_b \leq \frac{n+1}{2(n+2)^2} \frac{1}{Od}$$

et

$$-\hat{x}_b \leq \frac{2n+3}{4(n+3)^2} \frac{1}{Od}$$

On montre alors que l'arrêt d'effondrement du fluide se produit lorsque :

$$\hat{x}_{bstop} = -\frac{N_1}{Od} \quad \text{avec} \quad N_1 = \frac{2n+3}{4(n+3)^2}$$

et

$$\lambda_{stop} = \frac{N_2}{Od} \quad \text{avec} \quad N_2 = \frac{2n+3}{2(n+3)}$$

En remplaçant cette dernière équation dans l'équation (), on déduit :

$$\text{Eq. I-56} \quad \hat{x}_{fstop} - \hat{x}_{bstop} = \frac{N_3}{Od} \quad \text{avec} \quad N_3 = \frac{1}{8}(2n+3) \frac{2n^2+9n+6}{(n+3)^2(n+1)(n+2)} \quad (\text{I-0})$$

Ainsi, l'abscisse du front d'onde lors l'arrêt d'effondrement s'écrit comme suit :

$$\hat{x}_{fstop} = \frac{N_3 - N_1}{Od}$$

Pour déterminer l'expression de λ , on considère ici le cas d'un modèle en loi de puissance étudié précédemment dont la solution est exacte. Compte tenu des équations () et (), il vient pour $Od = 0$:

$$\hat{x}_f = \left[\frac{1+n}{n\lambda} \left(\frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)} \right)^{1/n} \right]^{\frac{n}{1+n}} (\hat{t} - \hat{t}_0)^{\frac{n}{1+n}}$$

Il résulte la même loi d'évolution du front d'onde avec un fluide en loi de puissance dont la solution est exacte. Rappelons dans ce cas que :

$$\hat{x}_f = \tilde{c}_f(n) (\hat{t} - \hat{t}_0)^{\frac{n}{1+n}} \quad \text{avec} \quad \tilde{c}_f(n) \approx \frac{1}{3} + 0.944 \left(\frac{n}{0.548n+1} \right)^{0.85}$$

En identifiant l'équation () à l'équation (), on obtient :

$$\lambda = \frac{1+n}{n \tilde{c}_f^{\frac{1+n}{n}}} \left(\frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)} \right)^{1/n}$$

Pour $n = 1$, on a $\lambda = 0.688$

Dans le cas général où $Od \neq 0$ et avant le blocage dynamique du fluide amont, l'équation () et () donne en fonction de λ , une équation de deuxième degré qui peut être résolue. On calcul Δ :

$$\Delta = 1 - 4\Gamma_1\Gamma_2 Od \hat{x}_f \quad \text{avec} \quad \Gamma_1 = (n+2)(n+3) \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \frac{\Gamma_1}{2(n+1)(2n+3)}$$

On vérifie que $\Delta \geq 0$ pour $\hat{x}_f \leq \hat{x}_{fstop}$

D'autre part, on vérifie qu'on obtient les mêmes lois d'arrêt d'effondrement au seuil d'équilibre statique (voir équation ()), mais ici l'arrêt dépend du nombre n aussi. Signalons aussi que cette solution n'est valable que si $Od \geq Od_c = N_1$, sinon on doit considérer le cas de la situation d'écoulement du fluide.

Pour $\Delta > 0$, on a :

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\Gamma_1\Gamma_2 Od \hat{x}_f}}{2\Gamma_2 Od}$$

Compte tenu de l'équation (), il vient :

$$\frac{d\hat{x}_f}{d\hat{t}} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{4\Gamma_2(n+1)Od}{1 - \sqrt{1 - 4\Gamma_1\Gamma_2 Od \hat{x}_f}} \right)^{1/n}$$

C'est cette équation différentielle du premier ordre qui donne la loi d'évolution du front d'onde en fonction du temps jusqu'à l'arrêt de l'effondrement ou jusqu'à la situation d'écoulement du fluide. Elle peut être intégrée pour plusieurs valeurs de $1/n$; mais on présente ici uniquement la solution pour $n=1$. On obtient avec la condition initiale $\hat{x}_f(\hat{t} = 0) = 0$, donc en négligeant l'hystoire inertielle de l'écoulement :

$$\hat{x}_f + \frac{5}{216 Od} \left(\left(1 - \frac{144}{5} Od \hat{x}_f \right)^{3/2} - 1 \right) = 6.978 Od \hat{t}$$

On déduit le temps lors du blocage dynamique de l'écoulement en remplaçant dans cette dernière équation $\hat{x}_f = \hat{x}_{fstop} = (25/768)/Od$, d'où :

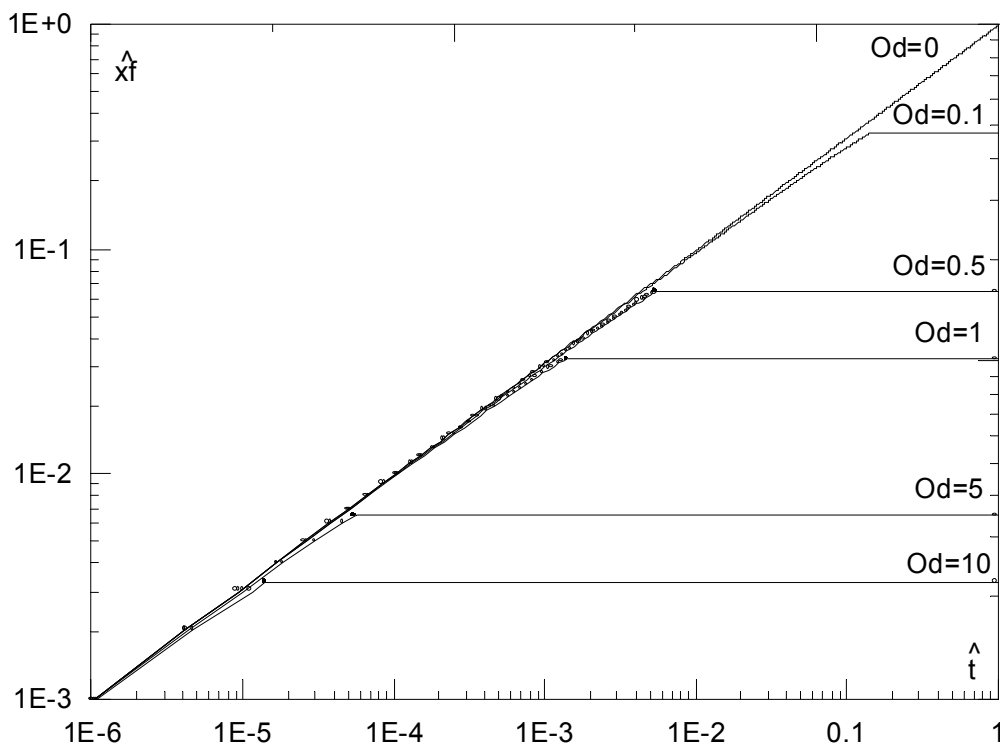
$$\hat{t}_{stop} = \frac{4.385 \times 10^{-3}}{Od^2}$$

Cette théorie prédit donc un blocage total et instantané. La vitesse de l'écoulement juste avant le blocage peut être déduite à partir de l'équation () et (), soit :

$$\hat{U}_{fstop} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{2(n+1)}{N_2} Od \right)^{1/n}$$

La vitesse du front avant le blocage augmente donc avec le nombre d'Oldroyd. Comme nous allons voir dans le dernier chapitre, la discontinuité de la vitesse lors de l'arrêt de l'écoulement explique en partie le phénomène de glissement observé avec ce type de fluide.

Ainsi, le problème est totalement défini pour cette situation d'effondrement jusqu'à l'arrêt instantané. On représente sur la figure la loi d'évolution du front d'onde en fonction du nombre d'Oldroyd. Pour un temps donné, le nombre d'Oldroyd diminue donc l'abscisse du front d'onde. On peut noter aussi la faible influence du nombre d'Oldroyd par rapport au cas visqueux notamment dans la phase initiale d'effondrement.



La loi d'évolution du front d'onde en fonction du nombre d'Oldroyd

1.5.2 L'étalement et l'arrêt du fluide

On est dans ce cas lorsque $Od \leq Od_c = N_1$. Tout le contour du réservoir s'écoule. Le profil de la surface libre reste toujours décrit par l'Eq. I-31, mais dans ce cas la profondeur du fluide varie entre $\hat{x} = -1$ et $\hat{x} = \hat{x}_f$ et la conservation du volume exprime :

$$\int_{-1}^{\hat{x}_f} \hat{h} d\hat{x} = 1$$

On définit \hat{h}_0 comme étant la profondeur du fluide à $\hat{x} = -1$. Compte tenu de l'équation (), il vient :

$$\text{Eq. I-57} \quad \hat{x}_f = \chi \left(\frac{\hat{h}_0^{n+2}}{n+2} - \frac{\chi \text{ Od } \hat{h}_0^{2n+2}}{2n+2} \right) - 1 \quad (\text{I-0})$$

Pour définir complètement le problème, il faut résoudre cette dernière équation et de déterminer la loi d'évolution de \hat{h}_0 en fonction de \hat{x}_f , mais la solution générale n'existe pas et pour $n=1$ (modèle de Bingham), on tombe sur équation de quatrième degré dont il existe plusieurs méthodes de résolution, comme la méthode générale de Tschirnhaus et la méthode de Ferrari. On n'exposera pas ici la solution analytique.

D'après la conservation de la masse et l'équation (), on a aussi :

$$\frac{\hat{h}_0^{2n+3}}{2n+3} \text{ Od } \chi^2 - \frac{\hat{h}_0^{n+3}}{n+3} \chi + 1 = 0$$

Pour donner la relation entre χ et \hat{h}_0 , il convient de résoudre cette dernière équation de deuxième degré. On calcul donc Δ , il vient :

$$\Delta = \left(\frac{\hat{h}_0^{n+3}}{n+3} \right)^2 \left(1 - \frac{\text{Od}}{N_1 \hat{h}_0^3} \right)$$

Comme dans la première situation, nous désignons l'état d'arrêt dynamique lorsque $\Delta \leq 0$ qui est la solution physique du problème. L'égalité donne :

$$\hat{h}_{0\text{stop}} = \left(\frac{\text{Od}}{N_1} \right)^{1/3}$$

et

$$\chi_{\text{stop}} = \frac{N_2}{\text{Od } \hat{h}_{0\text{stop}}^n} = \frac{N_2 N_1^{n/3}}{\text{Od}^{(3+n)/3}}$$

En remplaçant dans l'équation (), on obtient l'abscisse du front lors de l'arrêt dynamique de l'écoulement:

$$\hat{x}_f = N_2 \left(\frac{1}{n+2} - \frac{N_2}{2(n+1)} \right) \frac{\hat{h}_{0\text{stop}}^2}{\text{Od}} - 1 = \frac{N_4}{\text{Od}^{1/3}} - 1 \quad \text{avec} \quad N_4 = \frac{N_2}{N_1^{2/3}} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{N_2}{2(n+1)} \right)$$

On peut vérifier également ici qu'on obtient les même lois d'arrêt dynamique que dans le cas d'arrêt au seuil d'équilibre statique (voir l'équation ()), mais ici l'arrêt dépend du nombre n

aussi.

Pour déterminer l'expression de λ , on considère le cas d'un modèle en loi de puissance étudié précédemment dont la solution est exacte. Compte tenu des équations () et (), il vient pour $Od = 0$:

$$\chi = \frac{n+3}{\hat{h}_0^{n+3}} \quad \text{et} \quad \hat{h}_0 = \left(\frac{n+3}{n+2} \right) \frac{1}{\hat{x}_f + 1}$$

Compte tenu de l'équation (), il résulte :

$$\hat{x}_f(\hat{t}) = \left[\frac{2n+3}{n\lambda} \left(\frac{2(n+1)}{n+3} \right)^{1/n} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{(n+3)/n} \right]^{n/(2n+3)} \left[\hat{t} + \hat{c}_2 \right]^{\frac{n}{3+2n}} - 1$$

où \hat{c}_2 est une constante d'intégration.

On obtient donc la même loi d'évolution du front d'onde avec un modèle en loi de puissance dont la solution est exacte :

$$\hat{x}_f(\hat{t}) = \hat{c}_f \left[\hat{t} + \hat{c}_2 \right]^{\frac{n}{3+2n}} - 1$$

avec

$$\hat{c}_f = \left(\frac{(3+2n)}{n a^{(2+n)/n}} \left(\frac{2(n+1)^2}{(2+n)} \right)^{1/n} \right)^{\frac{n}{3+2n}} \quad \text{et} \quad a \approx \frac{2}{3} + \frac{0.297n}{1+0.705n}$$

En identifiant l'équation () à l'équation (), il résulte :

$$\lambda = \frac{2n+3}{n \hat{c}_f^{(2n+3)/n}} \left(\frac{2(n+1)}{n+3} \right)^{1/n} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{(n+3)/n}$$

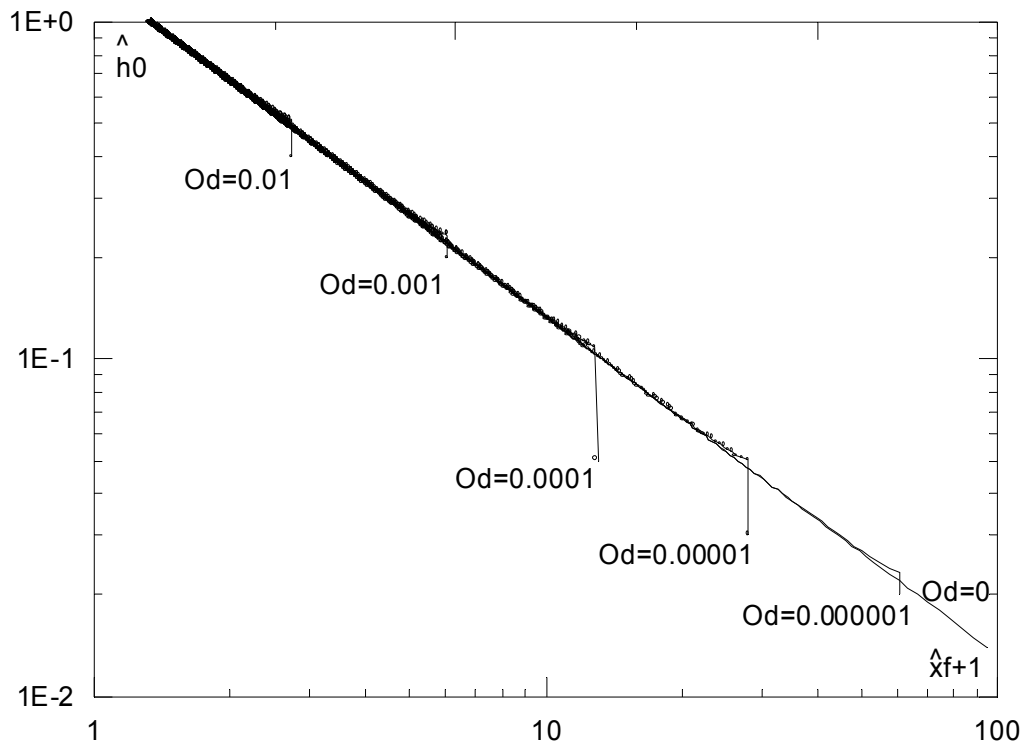
Pour $n = 1$, on a $\lambda = 0.705$ qui est proche de la valeur de λ pour la situation d'écoulement du front d'onde (=0.688). Donc λ dépend surtout de n est un peu de la situation d'écoulement.

Pour $\Delta > 0$ et $\hat{x}_f \leq \hat{x}_{fstop}$, on a :

$$\chi = \frac{N_2}{\hat{h}_0^n Od} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{Od}{N_1 \hat{h}_0^3}} \right] \quad 1 \leq \hat{h}_0 \leq \hat{h}_{0stop}$$

Cette dernière équation donne la vitesse du front d'onde en fonction de \hat{h}_0 . En remplaçant l'expression de χ dans l'équation (), on obtient la loi d'évolution du front d'onde en fonction de \hat{h}_0 , mais il n'est pas possible, comme dans la situation de l'écoulement du front amont, d'aller plus loin et de déterminer la loi d'évolution du front d'onde en fonction du temps. On représente alors sur la Figure l'évolution de la profondeur du fluide à l'extrémité amont du réservoir en fonction de la position du front, cela pour $n=1$ et pour différentes valeur de Od .

On remarque une faible influence du nombre d'Oldroyd sur l'écoulement. Le nombre d'Oldroyd, qui donne le seuil de contrainte, influence plutôt l'état d'équilibre.



$$\hat{x}_f + \frac{5}{216Od} \left(\left(1 - \frac{144}{5} Od \hat{x}_f \right)^{3/2} - 1 \right) = 6.978 Od \hat{t}$$

On déduit le temps lors du blocage dynamique de l'écoulement en remplaçant dans cette dernière équation $\hat{x}_f = \hat{x}_{fstop} = (25/768)/Od$, d'où :

$$\hat{t}_{stop} = \frac{4.385 \times 10^{-3}}{Od^2}$$

Cette théorie prédit donc un blocage total et instantané. La vitesse de l'écoulement juste

Passage au premier régime visqueux

Comme dans le cas Newtonien, nous supposons que le passage au régime visqueux se produit lorsqu'on atteint, dans le premier régime d'écoulement, le rapport de la position du front à la position de l'onde négative du deuxième régime visqueux (constant). On est amené alors à résoudre pour m donné (ou bien n), l'équation en τ suivante :

$$\text{Eq. I-58} \quad 2 - \left(\frac{2n+3}{2n+4} \right) \chi_1(n) \tau^{\frac{1}{2n+3}} + \left(\frac{2n+3}{2n+5} \right) \chi_2(n) \tau^{\frac{2}{2n+3}} = \frac{\tilde{c}_f(m)}{\tilde{c}_b(m)} \quad ; \quad n = \frac{1}{m} \quad (\text{I-0})$$

Si $\tau_c(m)$ (en variable \hat{t}_{c1}) est la solution de cette équation, on propose pour $1 \leq m < 10$ d'utiliser :

$$\text{Eq. I-59} \quad \tau_c(m) \approx 0.691 + \frac{1.923m^{3.4} + 4.665}{m^4} \quad (\text{I-0})$$

L'abscisse du front lors du passage (noté \hat{x}_{f1} en variable $\hat{}$) est obtenue en remplaçant dans l' $\tau = \tau_c(m)$. Par continuité de la fonction x_f , on détermine ensuite la constante \tilde{c}_1 intervenant dans l', soit :

$$\text{Eq. I-60} \quad \tilde{c}_1(m, Re) \approx \hat{t}_{c1}(m, Re) - \left(\frac{\hat{x}_{f1}(m, Re)}{\tilde{c}_f(m)} \right)^{m+1} \quad (\text{I-0})$$

Passage au deuxième régime visqueux

Cette transition peut être évaluée de deux manières différentes ; soit en supposant que le passage coïncide avec $\hat{x}_b = -1$, ou en supposant que la transition se produit lorsque le deuxième régime visqueux devient valable. Notons que les deux donnent des résultats très proches. En désignant ainsi $\hat{x}_{f2}(m)$ comme l'abscisse du front lors du passage (en variable $\hat{}$) et $\hat{t}_{c2}(m, Re)$ le temps correspondant, il résulte compte tenu de la deuxième analyse (déduite à partir de l') :

$$\text{Eq. I-61} \quad \hat{x}_{f2}(m) \approx \frac{1 - a(m)}{a(m)} \quad (\text{I-0})$$

En remplaçant dans l', on déduit :

$$\text{Eq. I-62} \quad \hat{t}_{c2}(m, Re) \approx \tilde{c}_1(m, Re) + \left(\frac{\hat{x}_{f2}(m)}{\tilde{c}_f(m)} \right)^{m+1} \quad (\text{I-0})$$

et compte tenu de la continuité de la fonction \hat{x}_f , on détermine la constante \hat{c}_2 intervenant dans l' :

$$\text{Eq. I-63} \quad \hat{c}_2(m, Re) \approx \hat{t}_{c2}(m, Re) - \left(\frac{\hat{x}_{f2}(m) + 1}{\hat{c}_f(m)} \right)^{3m+2} \quad (\text{I-0})$$

Remarquons que ce calcul suppose l'existence du premier régime visqueux, qui devrait être vraie lorsque :

$$\text{Eq. I-64} \quad Re_H < Re_{H \text{ lim}} = \frac{(2+m)^{1/m}}{\tau_c(m)} \frac{L}{H} \quad (\text{I-0})$$

Si $Re_H > Re_{H \text{ lim}}$, on définit la transition $(\hat{x}_{f3}, \hat{t}_{c3})$ comme le point d'intersection de la courbe globale calculée pour $Re_H = Re_{H \text{ lim}}$ avec la courbe du premier régime d'écoulement (), calculée avec la vraie valeur de Re_H .

Passage à l'état d'équilibre

Si le glissement est nul, l'écoulement s'arrête. L'évolution du système vers cet état d'équilibre dépend du niveau des contraintes à l'intérieur de l'écoulement. Comme dans ce problème de rupture de barrage, les contraintes diminuent en fonction de t et augmentent en fonction de x , il résulte que l'arrêt n'est jamais instantané. Par simplification, on suppose que c'est le cas, i.e que l'arrêt est instantané, et on considère que le temps lors de l'arrêt correspond à l'intersection de la courbe théorique sans seuil avec la droite d'arrêt ($x_f(t_{\text{stop}}) = x_{f\text{stop}}$).

La forme globale de la solution approchée

Etant donné que les transitions sont maintenant évaluées, on peut annoncer notre solution approchée. Les variables choisies sont de type $\hat{\ }()$. Si le glissement est nul le fluide s'arrête donc à une distance, fonction du nombre d'Oldroyd 'Od' et le nombre ϕ . L'écoulement qui précède cet état d'équilibre dépend de 'Re', l'indice de rhéofluidification 'm', le nombre ϕ et le nombre d'Oldroyd. La solution est donc de la forme suivante :

$$\hat{h} = \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}, Re, m, Od, \phi); \quad \hat{U} = \hat{U}(\hat{x}, \hat{t}, Re, m, Od, \phi); \quad \hat{x}_f = \hat{x}_f(\hat{t}, Re, m, Od, \phi)$$

avec

$$(Re, Od, \phi) = \left(\frac{\rho H^{1/m} (\sqrt{gH})^{\frac{2m-1}{m}}}{k} \frac{H}{L}, \frac{sL}{\rho gH^2}, \frac{s\phi}{\rho gH} \right)$$

Les expressions approchées de la solution est représentée en annexe. La phase de l'écoulement sans glissement est donc caractérisée.

1.6 Application de l'étude aux consistomètres

Il existe dans l'industrie un certain nombre d'instruments très économiques facilement utilisables, qui mesurent la consistance à partir de la résistance du fluide à l'écoulement sous des conditions spécifiques, dans un temps donné. On les appelle les consistomètres. Les plus souvent utilisés sont le consistomètre de Bostwck et le consistomètre d'Adam. Le premier est

de forme rectiligne, tandis que le deuxième est de forme cylindrique. Ces instruments sont à l'heure actuelle basés sur des relations empiriques.

Il est possible de déduire à partir de notre étude quelques relations théoriques simples donnant la consistance des fluides visqueux ou viscoplastiques dans un canal rectiligne.

1. Si le seuil de contrainte est nul, on propose de caractériser la consistance du fluide à partir de la connaissance de l'indice de rhéofluidification n et de la consistance k , qui peuvent être évaluées expérimentalement en mesurant aux temps grands l'évolution du front d'onde en fonction du temps. En effet, compte tenu de la relation on doit avoir dans ce cas :

$$\text{Eq. I-65} \quad x_f(t) + 1 = K t^\alpha \quad (\text{I-0})$$

Les mesures dans le canal donnent les valeurs expérimentales de $x_f(t)$ qui peuvent être ajustées avec la loi (Eq. I-65). On en déduit les valeurs de K et α . On calcul ensuite les valeurs de m et k à partir des relations suivantes :

$$m = \frac{1 - 2\alpha}{3\alpha} \quad \text{et} \quad k = \left(\frac{m}{2m + 2} \right) \left(\frac{1}{m + 2} \right)^{1/m} \left(\frac{\hat{c}_f(m)}{K} \right)^{\frac{3m+2}{m}} V_0^{\frac{2m+1}{m}} \rho g$$

où $V_0 = H.L$ est le volume initial du fluide

Notons que ces relations sont exactes pour un fluide en loi de puissance. Si le fluide obéit à une loi différente, mais de propriétés intemporelles, il est toujours possible de définir dans une plage adéquate de variation de t , un indice apparent n_c et une consistance apparentes k_c . Ils peuvent être ensuite utilisés pour une meilleure comparaison entre les matériaux très visqueux.

2. Si le seuil de contrainte n'est pas nul, on propose de caractériser dans ce cas la consistance à partir de la connaissance de la valeur du seuil, qui peut être mesurée dans le canal connaissant les valeurs expérimentales de h_{0stop} et x_{fstop} (la profondeur du fluide au bord amont du canal et l'abscisse du front lors de l'arrêt, respectivement). On en déduit compte tenu de l'Eq. I-31 (valable lorsque $h_{0stop} < H$) la valeur de s , soit :

$$\text{Eq. I-66} \quad s = \frac{(\varphi h_{0stop} + x_{fstop} + L)\rho g}{\varphi^2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi h_{0stop}}{\varphi h_{0stop} + x_{fstop} + L} \right)^2} \right] \quad \text{avec } \varphi \approx 1.5 \quad (\text{I-0})$$

Compte tenu d'un grand allongement du fluide au repos on peut encore simplifier la relation (Eq. I-66) par la formule approchée suivante :

$$\text{Eq. I-67} \quad S \approx \frac{\rho g h_{0stop}}{2} \left(\frac{h_{0stop}}{\phi h_{0stop} + x_{fstop} + L} \right) \quad (\text{I-0})$$

Notons que d'après les résultats expérimentaux, l'Eq. I-67 donne des valeurs du seuil de contrainte avec écart maximal par rapport à la valeur obtenue en rhéométrie de 10%. On obtient donc un écoulement simple contrôlable qui peut être utilisé comme un nouveau rhéomètre très économique, facilement utilisable et donne des résultats satisfaisants.

I.7 Résultats obtenus

Le fluide à seuil qu'on a testé est une solution d'eau et de Carbopol. Le fluide a été caractérisé à l'aide du rhéomètre Weissenberg. Rappelons que le fluide est de type Herschel-Bulkley. Les paramètres rhéologiques (seuil de contrainte, la consistance du fluide et l'indice de rhéofluidification) ont été évalués par ajustement de la loi théorique aux résultats de mesures. D'autre part, les expériences de rupture de barrage ont été réalisées dans la même plate-forme que celle qui a été utilisé dans le chapitre III avec le modèle Newtonien (solution de glucose). On récapitule dans le Tableau I-1 les différentes configurations de l'écoulement choisies pour mener notre étude expérimentale.

Comme en rhéométrie, le phénomène de glissement a été identifié dans les canaux lisses. Il détermine la reprise de l'écoulement après une impression d'arrêt. Nous profitons alors de l'occasion pour présenter dans la section qui suit l'étude du problème de rupture de barrage avec glissement. Compte tenu des résultats obtenus, à la fois dans le canal et en rhéométrie, on présente en Annexe A la théorie du problème de rupture de barrage avec la condition de glissement. Dans cette section nous discutons les résultats sans évoquer ce phénomène. Notons que pour empêcher le fluide de glisser, on a fixé du papier rugueux (de rugosité 0.2 mm) au fond du canal, exactement comme en rhéométrie (voir chapitre I). On obtient ainsi un écoulement sans glissement macroscopique qui tend vers un arrêt.

I.7.1 Evaluation du seuil de contrainte et ϕ_0 à partir du profil quasi-statique

Lorsqu'on trace $F(\hat{h}_{stop}) = \phi \hat{h}_{stop} - (\hat{h}_{stop}^2 / 2)$ en fonction de \hat{x} , on peut observer une droite (Fig. I-2). Théoriquement la pente de cette droite devrait être égale à Od (Eq. I-30), et compte tenu de la condition $\hat{h}_{stop}(\hat{x} = \hat{x}_{stop}) = \phi_0$ la constante d'intégration C intervenant dans l'Eq. I-30 devrait être égale à :

$$C = \phi \phi_0 - \frac{\phi_0^2}{2} - Od \hat{x}_{fstop}$$

qui donne :

$$\text{Eq. I-68} \quad \phi_0 = \phi + \sqrt{\phi^2 - 2(Od \hat{x}_{fstop} + C)} \quad (\text{I-0})$$

A l'aide de ces résultats, il est possible d'évaluer expérimentalement la valeur du seuil de contrainte et la valeur de ϕ_0 connaissant les paramètres géométriques de l'écoulement (L et H) et les mesures obtenus dans le canal (profil d'équilibre et la position du front d'onde lors de l'arrêt).

- En utilisant la valeur du seuil de contrainte obtenue en rhéométrie, on calcule d'abord les valeurs des nombres $\phi = \phi^0$ et $Od = Od^0$.
- Etant donné la valeur calculée de $\phi = \phi^0$, on trace la quantité $F(\hat{h}_{stop}) = \phi \hat{h}_{stop} - (\hat{h}_{stop}^2 / 2)$ en fonction de \hat{x} , et on prélève ensuite la pente de la droite obtenue ($= Od^1$, voir Fig. I-2).
- Si $Od^0 \approx Od^1$, on retient la valeur initiale du seuil. Sinon on peut l'ajuster et répéter ensuite les étapes jusqu'à avoir un meilleur accord ($Od^i \approx Od^{i-1}$), qui donne la valeur du seuil la plus représentative des mesures dans le canal.
- Pour évaluer la valeur de ϕ_0 , on prélève à partir de la courbe $F(\hat{x})$ avec la valeur du seuil calculée comme indiquée ci-dessous, la constante C. A la fin, on calcul la valeur de ϕ_0 à partir de l'Eq. I-68.

Pour ajuster les mesures à la droite théorique, on a utilisé la méthode des moindres carrées. Les valeurs du seuil ainsi calculées sont représentées dans le Tableau I-1. On obtient un écart part rapport aux mesures rhéométriques de 15% (7% pour un seuil grand, voir Fig. I-2). Cependant, vu la très grande sensibilité de ϕ_0 à la variation de C, le calcul de ϕ_0 à partir de cette analyse est moins précis. Néanmoins, on peut évaluer la valeur de ϕ_0 d'une manière différente en supposant qu'elle correspond à la profondeur du fluide possible à mesurer, et se situant le plus proche possible à la position du front d'onde. Dans ces conditions, on trouve $\phi_0 \approx \phi$, mais compte tenu des erreurs qui apparaissent au voisinage du front, il convient de prendre cette valeur avec soin. D'autre part, on peut vérifier sur la Fig. I-2 que, dans certains cas, l'arrêt au seuil d'équilibre statique ne concerne pas la zone au voisinage du bord amont du canal. Comme nous allons voir dans la suite, l'écart qui peut être observé dans cette région, est d'autant plus important lorsque le nombre d'Oldroyd augmente. On explique ce désaccord

par l'influence de l'histoire de l'écoulement sur l'état d'équilibre.

Si on fait dans le calcul $\phi = 0$, on obtient un écart par rapport aux mesures rhéométriques beaucoup plus important (30% pour un seuil grand, voir Fig. I-3). En outre, on peut vérifier sur la Fig. I-3, que la droite théorique (Eq. I-30 avec $\phi = 0$) est moins adéquate dans ce cas, notamment dans la région frontale.

1.7.2 Comportement de l'écoulement au voisinage du barrage

Aux temps petits, le système ultrasonique trouve des limites d'applications à cause de la rapidité de l'écoulement. D'autre part, on a jugé intéressant de connaître le comportement de l'écoulement dans ces temps petits et spécialement à l'emplacement du barrage et son entourage. On a opté alors pour des mesures optiques à l'aide de la caméra rapide. La caméra est fixée sur un pied pour prendre des prises de vue latérales. Les films obtenus sont représentés par les photographies (Fig. I-4). Les images sont analysées sur micro-ordinateur, puis représentées sur les figures IV-7 et IV-8. Lors de la levée non instantanée de la plaque, une quantité du fluide est entraînée vers le haut, en même temps, le fluide coule au-dessous. A la fin, on obtient une pile de fluide presque triangulaire qui se propage avec l'écoulement. La pile peut complètement disparaître si la hauteur est faible ou le fluide est moins consistant, mais elle peut rester pour toujours (où elle atteint un état d'équilibre quasi-statique) si on a affaire à un fluide très consistant (Fig. I-15). La pile du fluide influence certainement l'écoulement, mais sur une distance très petite de part et d'autre de la pile. Elle peut cependant entraîner, parfois, des erreurs importantes dans la conservation de la quantité initiale du fluide.

Pour compléter les données du problème, on représente sur la Fig. I-7 la loi d'enlèvement de la plaque (barrage). On peut alors distinguer deux régimes d'écoulement. Dans le premier régime, la vitesse de la plaque est constante (environ 0.17 m/s). Dans le second régime, la plaque est enlevée avec une accélération quasi-constante (d'environ 2.2 m/s²). Il faut cependant signaler que dans ce dernier régime, la plaque est complètement enlevée. Comme la durée finie de la levée de la plaque (environ 0.1 s) est comparable à la durée de l'expérience (environ 0.5 s avant l'arrêt), l'influence de la levée de la plaque est non négligeable. Cela explique peut-être l'existence d'une part d'un point anguleux dans la section du barrage ; d'autre part une différence de concavité de part et d'autre de ce point singulier (Fig. I-5).

1.7.3 Evolution du front d'onde

Sur les figures IV-10, IV-11, IV-12 et IV-13, on représente en variables adimensionnelles l'évolution en fonction du temps de la position du front d'onde. Les courbes représentées sur la Fig. I-8 ont été obtenues dans un canal lisse, donc avec glissement. Tous les points obtenus ultérieurement à l'impression d'arrêt ont été enlevés de la figure. Nous voulons à partir de cette présentation, confirmer que dans la phase initiale de l'écoulement, le glissement est absent. Il semble que c'est le cas ou alors, il est négligeable. D'autre part, l'ensemble des courbes obtenues a été comparé à notre solution approchée (comportant le régime principalement inertiel, le premier et le deuxième régime visqueux, et l'arrêt). L'accord est satisfaisant, on obtient un écart maximal d'environ 10%.

Un résultat également intéressant de cette étude, concerne l'arrêt d'écoulement. Cette propriété des fluides à seuil de contrainte se manifeste lorsque la plasticité du fluide domine les autres termes résistants (frottements visqueux et l'inertie). Si l'arrêt est au seuil d'équilibre statique, on a montré théoriquement l'influence à la fois du nombre d'Oldroyd et ϕ . Sur la Fig. I-12, on représente la variation de l'abscisse du front lors de l'arrêt en fonction du nombre d'Oldroyd (ici Od est grand). Les mesures sont comparées à la théorie de blocage. On vérifie que le meilleur accord est obtenu en tenant compte des contraintes élongationnelles. La Fig. I-13 qui montre également l'évolution de la position du front lors de l'arrêt en fonction du nombre d'Oldroyd (Od petit dans ce cas) a été comparée à la théorie d'arrêt. On obtient aussi un accord très remarquable, mais en tenant compte des contraintes élongationnelles. Donc, on montre ici l'influence non négligeable des contraintes élongationnelles lors de l'arrêt de l'écoulement.

1.7.4 Profil d'équilibre

Etat d'équilibre

Sur les figures IV-16 et IV-17 on représente le profil de la surface libre lors de l'arrêt en fonction du nombre d'Oldroyd. Pour Od grand (Fig. I-14), on remarque l'existence effectivement d'un point particulier qui sépare deux régions : une région où la hauteur est sensiblement constante égale à la hauteur initiale du réservoir, et une région où la hauteur décroît. La distance de ce point (compté à partir du barrage) diminue avec l'augmentation du nombre d'Oldroyd. Il faut cependant signaler que la théorie sous-estime la position de ce point particulier à cause de l'influence de l'histoire de l'écoulement. Pour Od petit (Fig. I-15), on remarque que tout le contour du réservoir s'écoule et que la hauteur à l'extrémité amont du

réservoir diminue avec le nombre d'Oldroyd. L'ensemble de ces profils a été comparé à la prédiction de la théorie et on tire un accord satisfaisant, l'accord étant d'autant meilleur lorsqu'on diminue la valeur du nombre d'Oldroyd.

1.7.5 Effets de la pente

A titre comparatif seulement, nous avons réalisé un certain nombre d'expériences dans un canal incliné. On représente sur la Fig. I-16 la variation de la position du front d'onde en fonction du temps. La condition initiale utilisée est la condition initiale à hauteur nulle ($\hat{L} = 1$). L'écoulement est dans un premier temps rapide, puis la vitesse du front diminue progressivement et augmente ensuite à partir d'un certain temps. Le redémarrage est dû au glissement car le canal utilisé dans ce cas est lisse. Les mesures sont comparées à la théorie déduite à partir du cas horizontal (solution du régime principalement inertiel et la solution visqueuse en utilisant dans tous les cas $g \cos(\alpha)$ en place de g). Il semble alors, comme dans le cas Newtonien, que la pente du canal n'a pas d'influence aussitôt après la rupture de barrage, mais cela ne reste pas vrai à partir d'un certain temps. On devrait plus tard compléter ce travail par une meilleure investigation des effets de la pente.

Tableau I-1 : Différentes configurations de l'écoulement

Désignation	C %	H mm	L mm	Rhéométrie			Canal s Pa	Glissement canal		Re	Od	ϕ	S_g $\times 10^{-3}$	
				n	k Pa.s ⁿ	s Pa		α	k_g Pa.s ^{α}					
CARB.1	0.11	55	110	0.45	2.6	9.5	11	1.294	78.4	32.3	0.041	0.031	1.43	
			220							16.2	0.082		2.73	
			440							8.1	0.163		5.19	
CARB.2	0.1	52	100	0.45	2.4	7.3	8	1.294	78.4	34	0.030	0.024	1.22	
			200							17	0.060		2.32	
			400							8.5	0.121		4.41	
CARB.3		100	100	100	0.45	2.4	7.3	8	1.294	78.4	145.7	0.008	0.012	0.362
				200							72.8	0.016		0.688
				300							48.5	0.026		1.00
CARB.4	0.41	100	200	0.39	15.6	56	60	/	/	12.9	0.122	0.092	/	
			400							6.43	0.245		/	
			600							4.3	0.367		/	
CARB.5		100	100	-	0.39	15.6	56	60	/	/	5.14	0.061-	0.092	/
											500	-		0.306
CARB.6		51.5	100	-	0.39	15.6	56	60	/	/	1	0.231-	0.178	/
	600										-	1.384		/
										6			/	

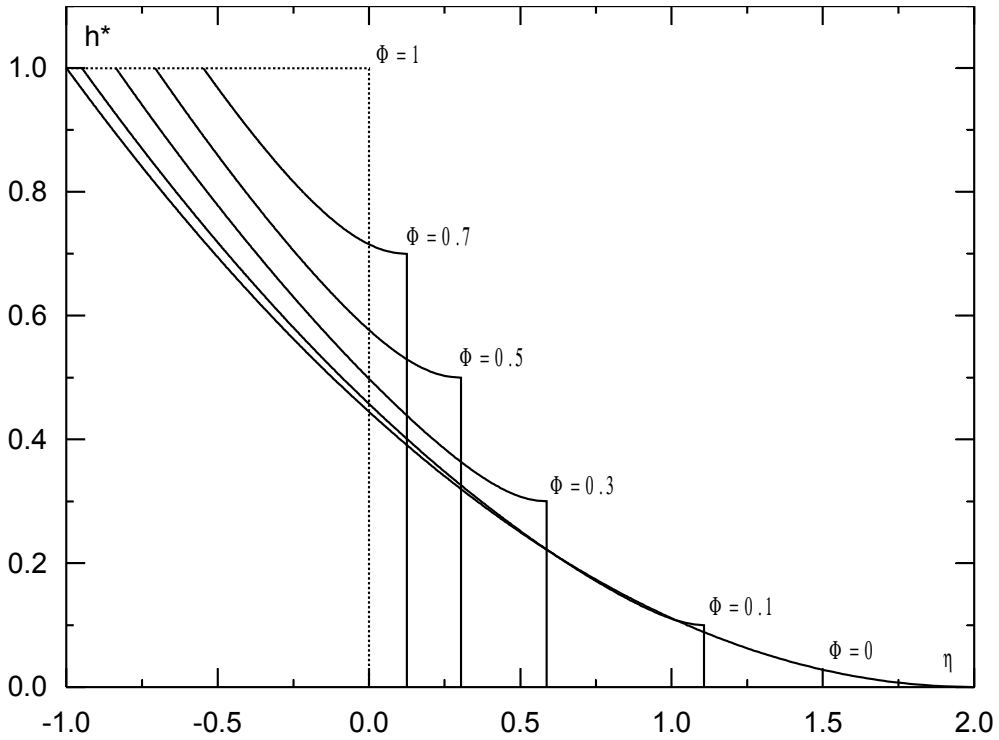


Fig. I-1 Figure I-1 : Effets des contraintes élongationnelles sur la forme du profil d'écoulement en régime inertiel ; variables adimensionnelles, fond horizontal

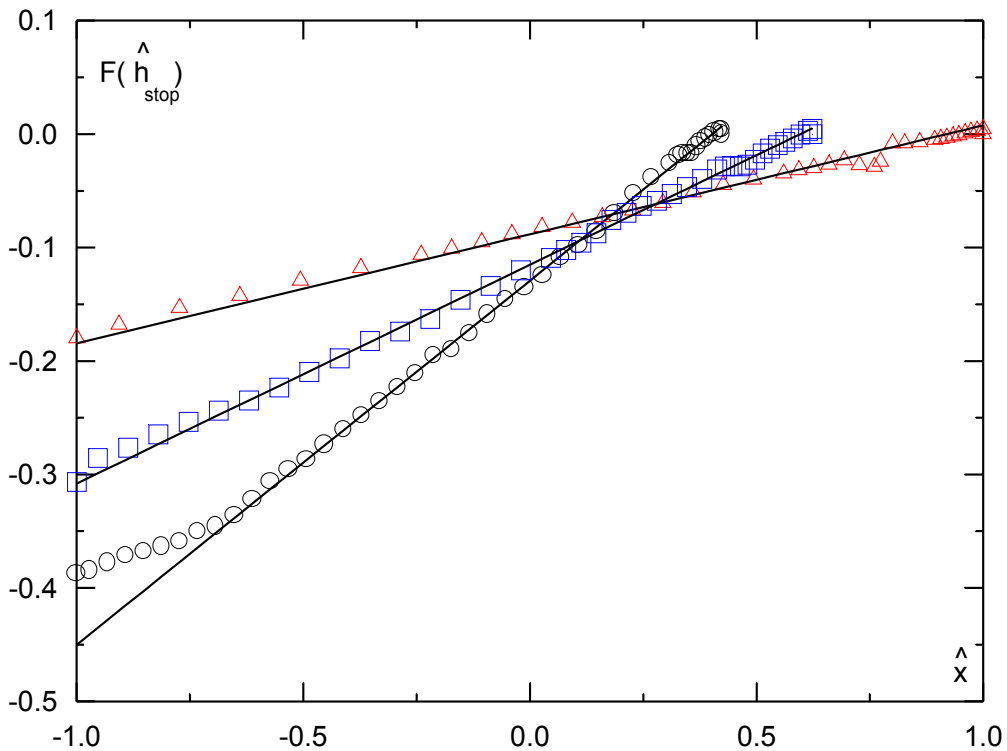


Fig. I-2 Figure I-2 : Evaluation du seuil de contrainte à partir de l'analyse du profil d'équilibre ($s = 60 Pa$, 7% d'écart par rapport aux mesures rhéométriques), $\phi = 0.092$, Carb. 5, $\Delta L = 150$ mm, $L = 300$ mm, $O L = 500$ mm

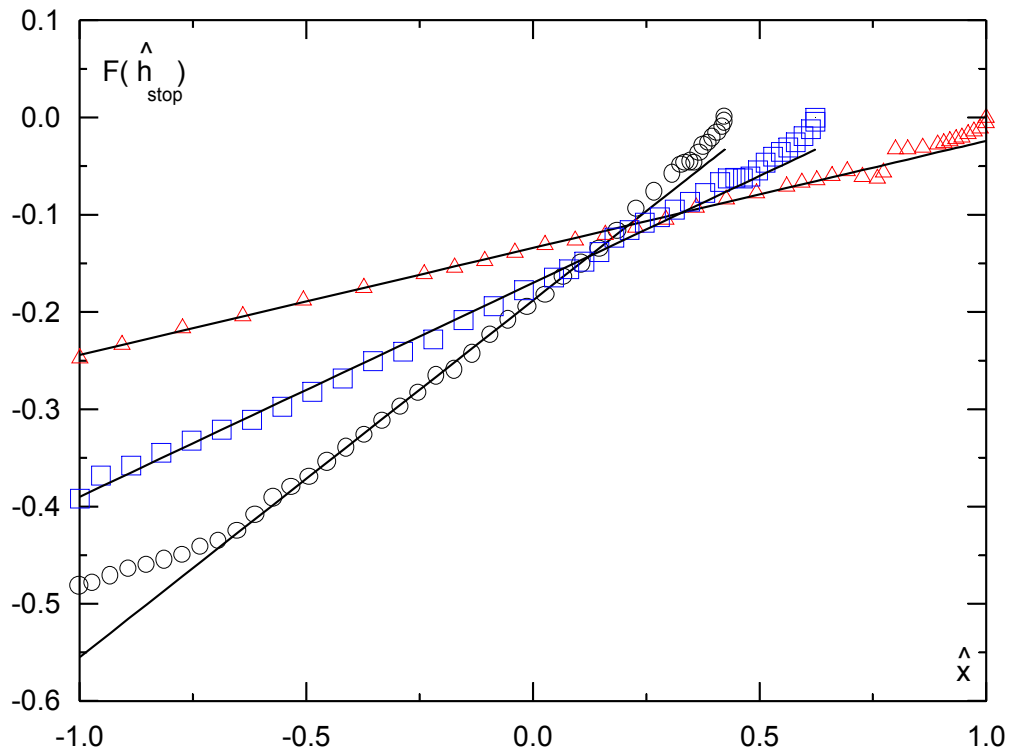


Fig. I-3 Figure I-3 : Effet non négligeable des contraintes élongationnelles sur le profil d'équilibre ($s = 72 Pa$, 30% d'écart par rapport au mesures rhéométriques), $\phi = 0$, Carb. 5, $\Delta L=150$ mm, $L=300$ mm, $O L=500$ mm

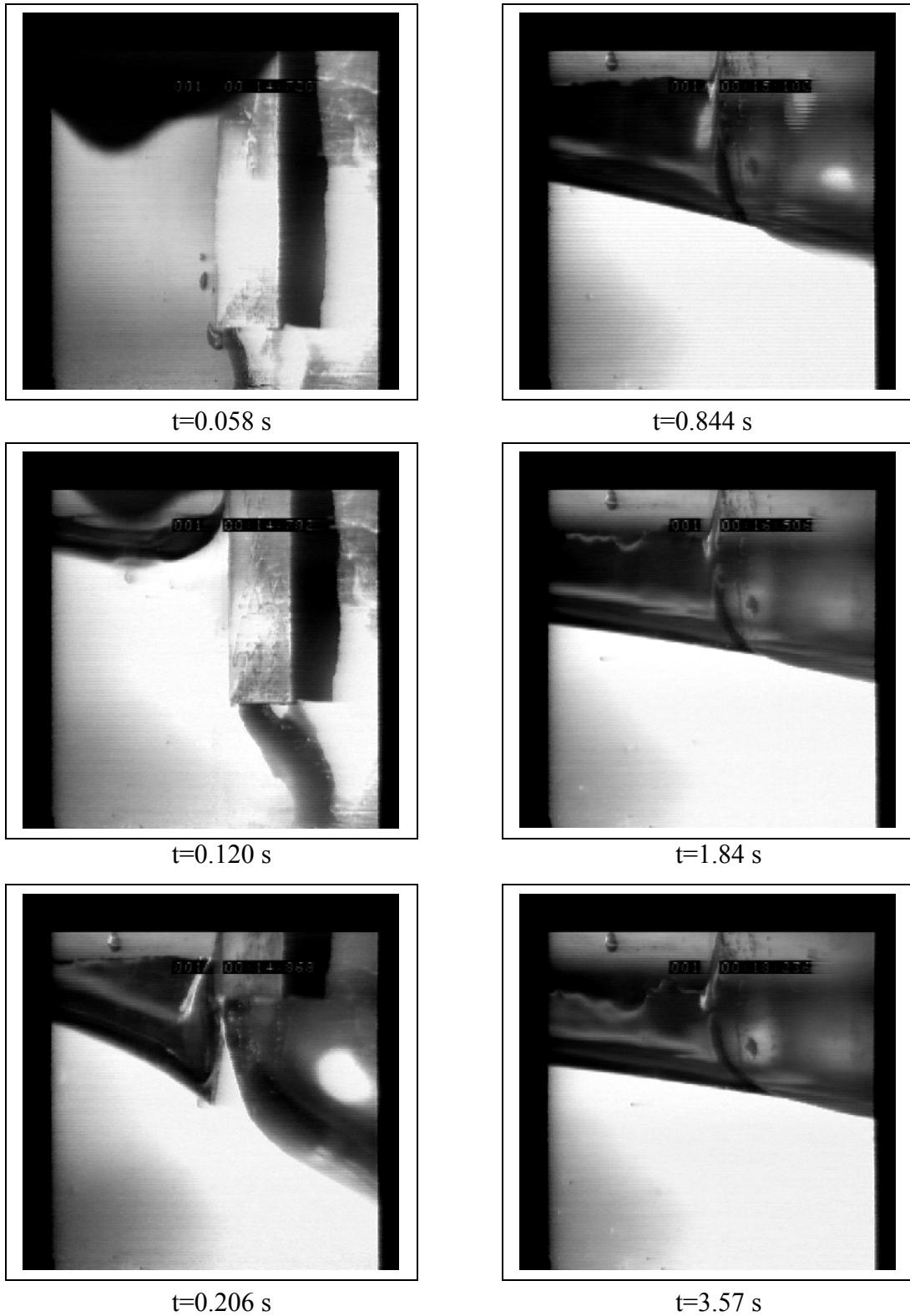


Fig. I-4 Figure I-4 : Forme de l'onde de rupture de barrage au voisinage du barrage ; gel de Carbopol, fond horizontal, CARB.1, L=500 mm

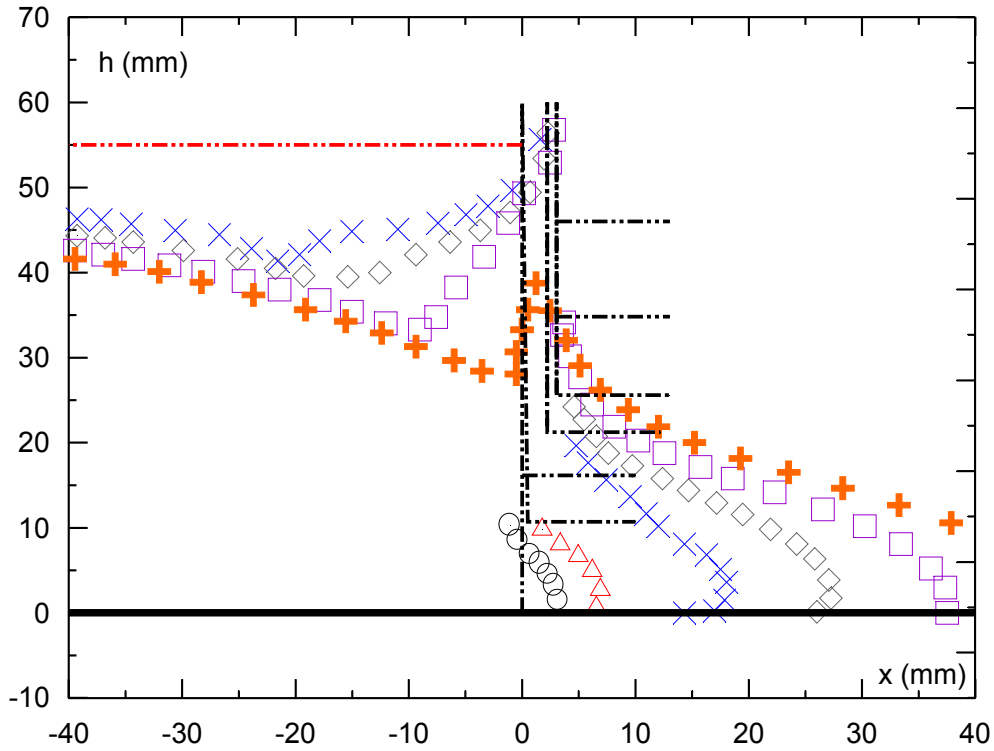


Fig. I-5 Figure I-5 : Levée de la plaque ; Evolution du profil de la surface libre au voisinage du barrage, gel de Carbopol, fond horizontal, CARB.1, L=500 mm, O $t = 0.058$ s, $\Delta t = 0.082$ s, $\times t = 0.120$ s, $\diamond t = 0.148$ s, $\square t = 0.180$ s, $\oplus t = 0.206$ s,

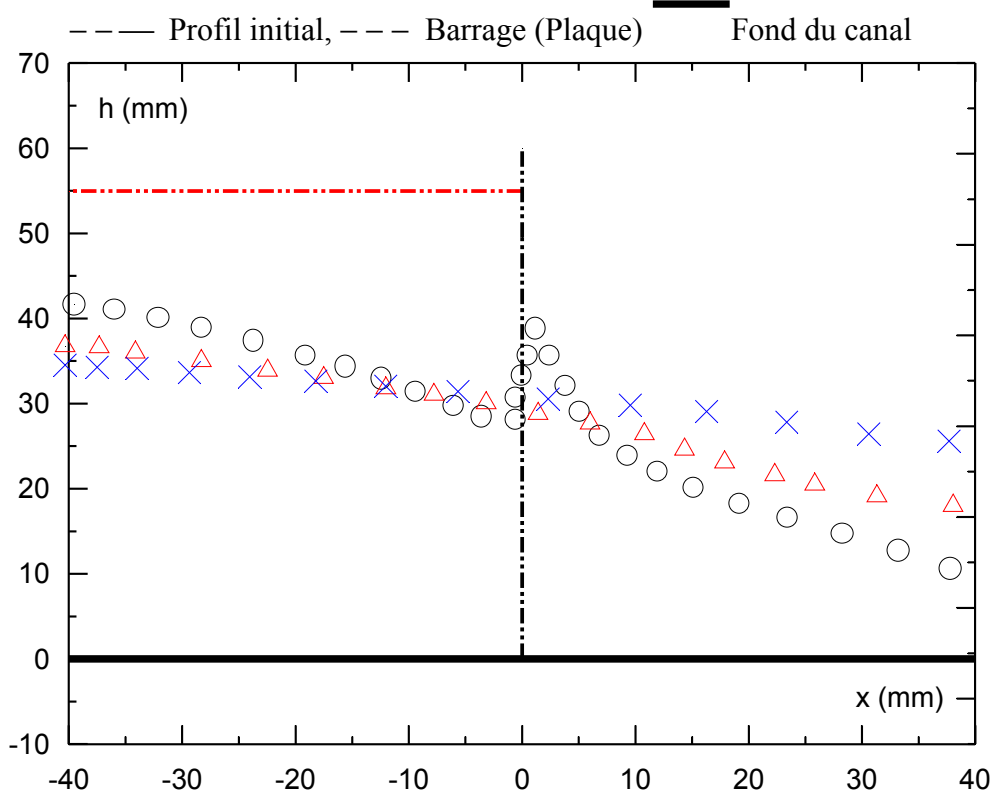


Fig. I-6 Figure I-6 : Evolution du profil de la surface libre au voisinage du barrage, gel de Carbopol, fond horizontal, CARB.1, L=500 mm, O $t = 0.206$ s, $\Delta t = 0.318$ s, $\times t = 3.57$ s,

--- Profil initial, --- Barrage (Plaque) ——— Fond du canal

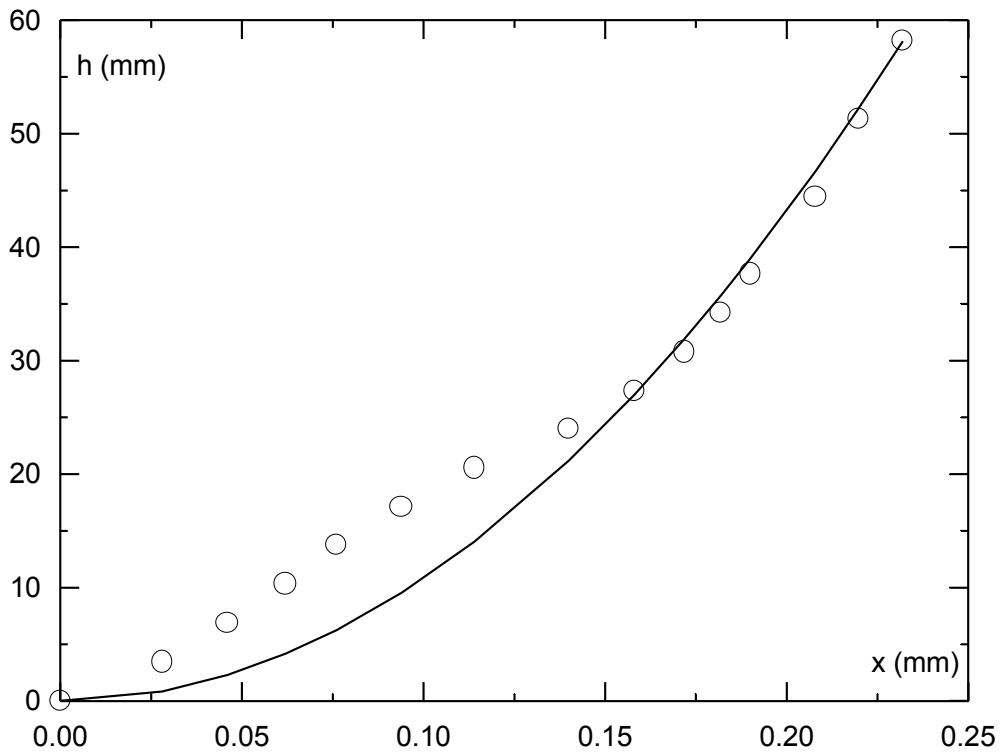


Fig. I-7 Figure I-7 : Loi d'enlèvement de la plaque (barrage), gel de Carbopol, fond horizontal, CARB.1

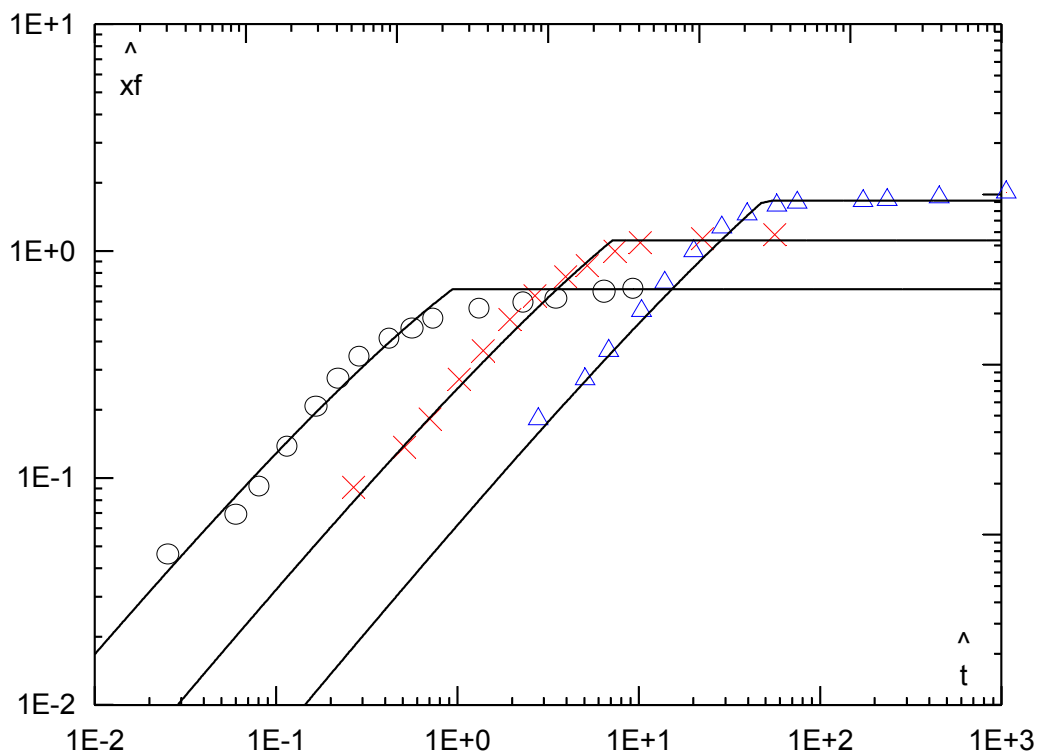


Fig. I-8 Figure I-8 : Evolution de la position du front d'onde en fonction du temps, gel de Carbopol ; fond horizontal, variables adimensionnelles ; CARB.1, $\Delta L = 110 \text{ mm}$, $\times L = 220 \text{ mm}$, $O L = 440 \text{ mm}$, — Théorie

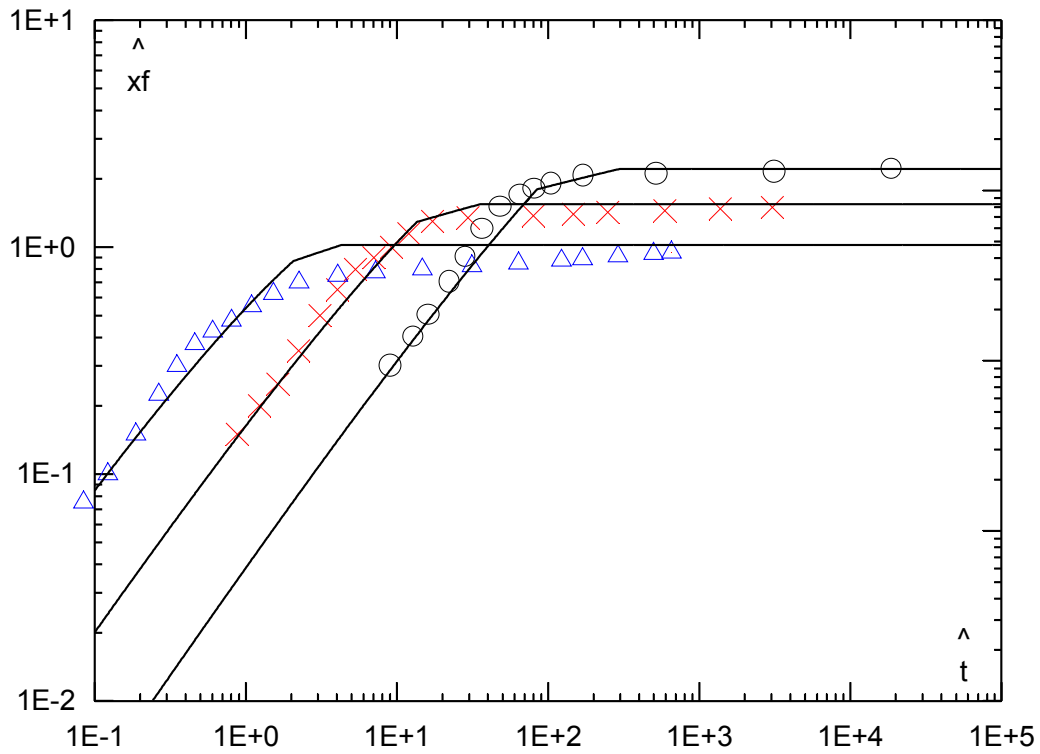


Fig. I-9 Figure I-9 : Evolution de la position du front d'onde en fonction du temps, gel de Carbopol, fond horizontal ; Variables adimensionnelles, CARB.2,
 O L = 100 mm, × L = 200 mm, Δ L = 400 mm, ——— Théorie

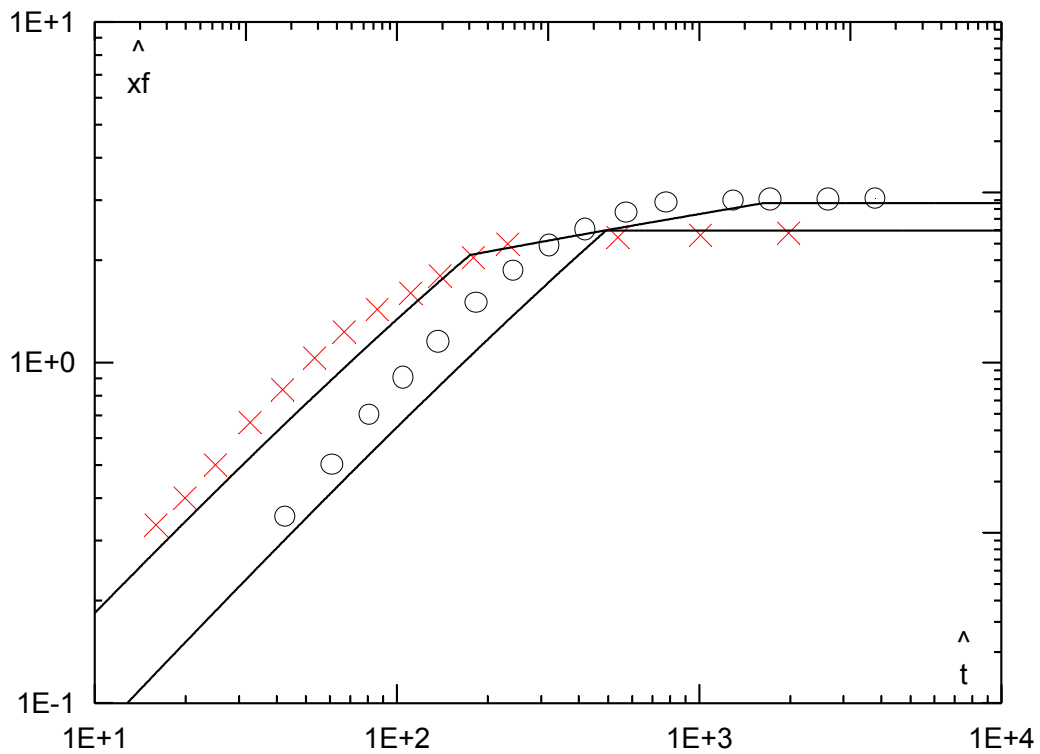


Fig. I-10 Figure I-10 : Evolution de la position du front d'onde en fonction du temps, gel de Carbopol, fond horizontal, Variables adimensionnelles, CARB.3,
 O L = 200 mm, × L = 300 mm, ——— Théorie

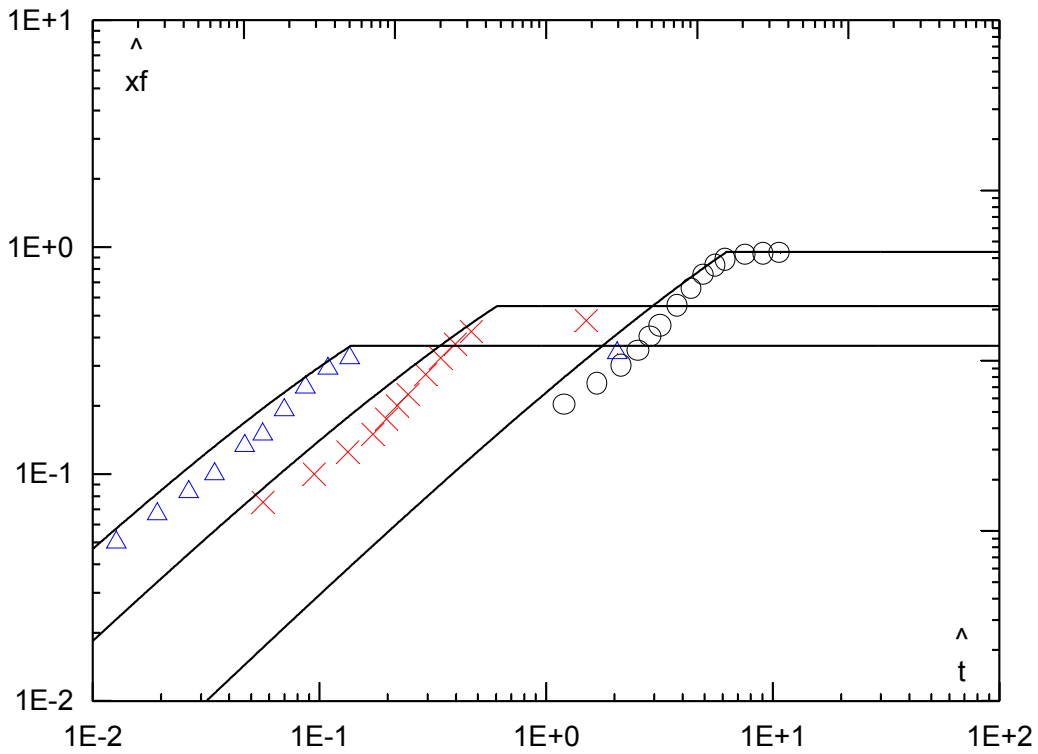


Fig. I-11 Figure I-11 : Evolution de la position du front d'onde en fonction du temps, gel de Carbopol, fond horizontal, Variables adimensionnelles, CARB.4, O L =200 mm, \times L = 400 mm, Δ L= 600 mm, — Théorie

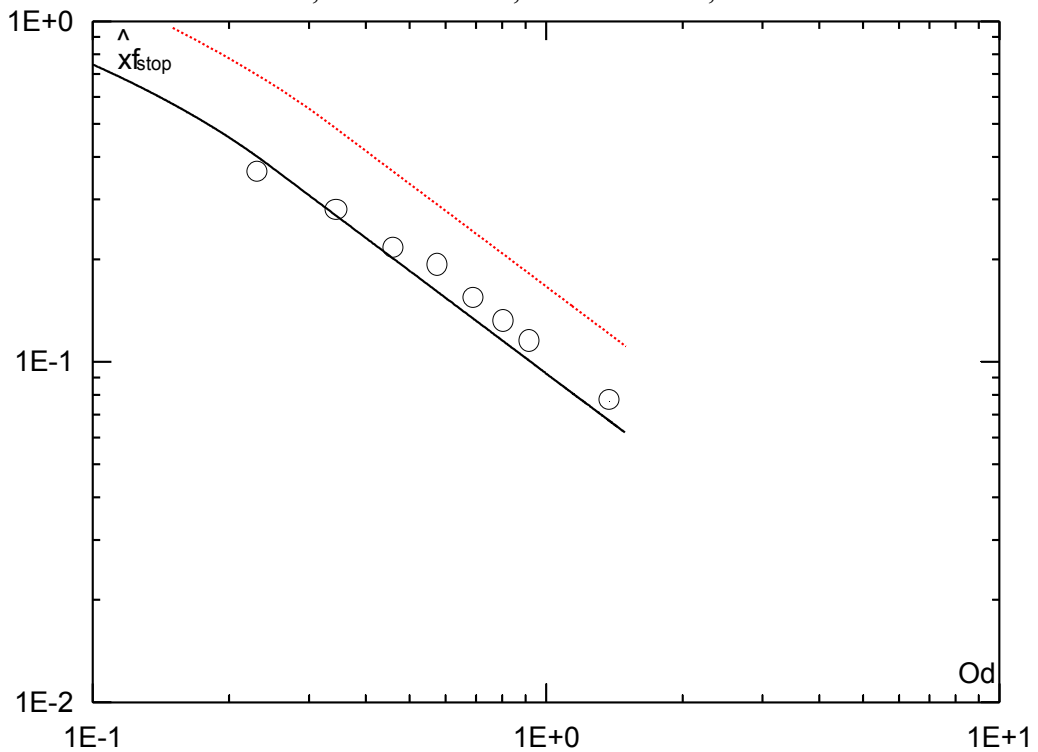


Fig. I-12 Figure I-12 : Position du front d'onde lors de l'arrêt en fonction de Od , gel de Carbopol, fond horizontal, variables adimensionnelles CARB.6, o Expérience — Théorie ($\phi = 0.178$), - - - Théorie ($\phi = 0$)

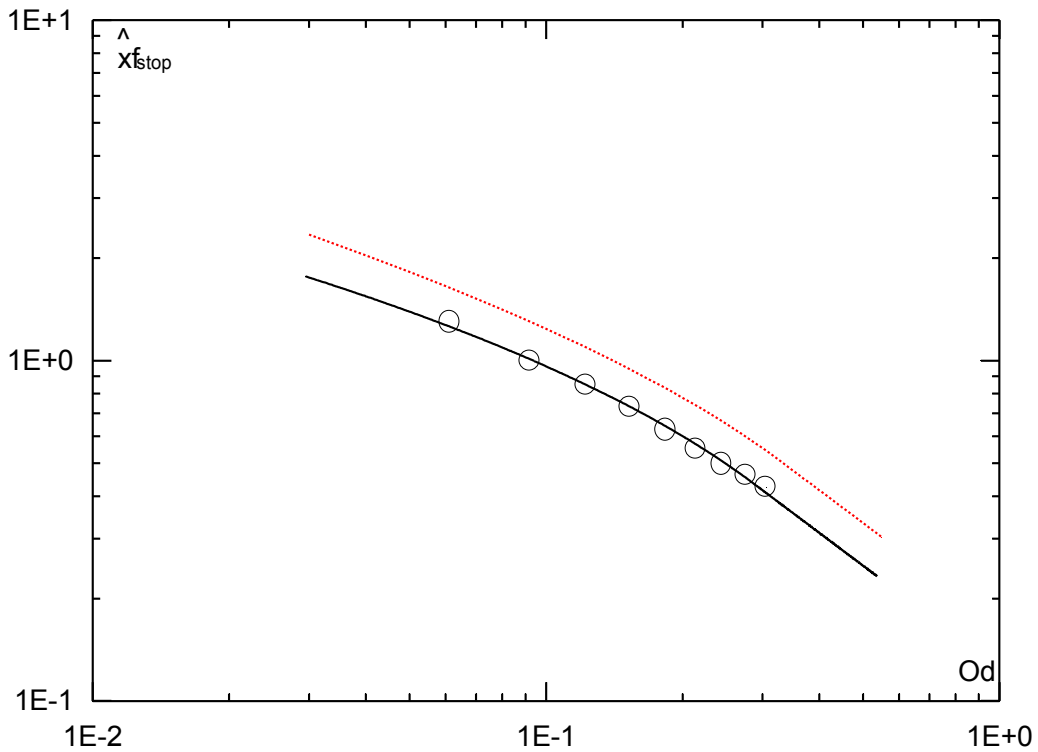


Fig. I-13 Figure I-13 : Position du front d'onde lors de l'arrêt en fonction de Od , gel de Carbopol, fond horizontal, variables adimensionnelles, CARB.5, o Expérience

— Théorie ($\phi = 0.092$), - - - Théorie ($\phi = 0$)

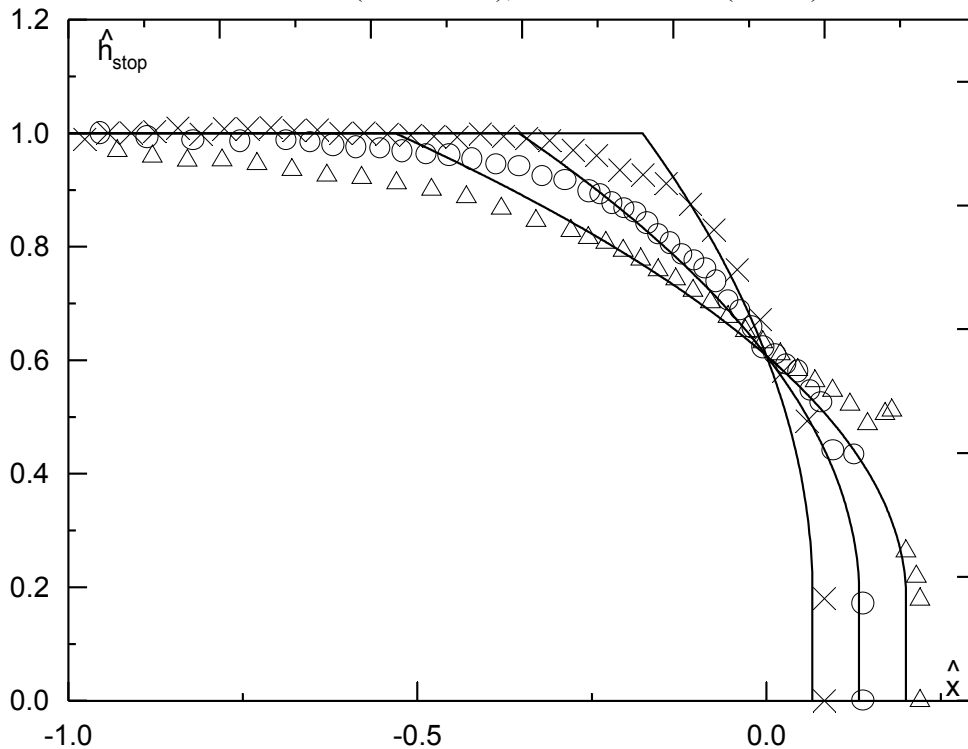


Fig. I-14 Figure I-14 : Profil d'équilibre en fonction de Od ; gel de Carbopol ; fond Horizontal, CARB.6, Δ $L=200$ mm ($Od=0.461$), O $L=300$ mm ($Od=0.692$),

\times $L=600$ mm ($Od=1.384$), — Théorie ($\phi = 0.178$)

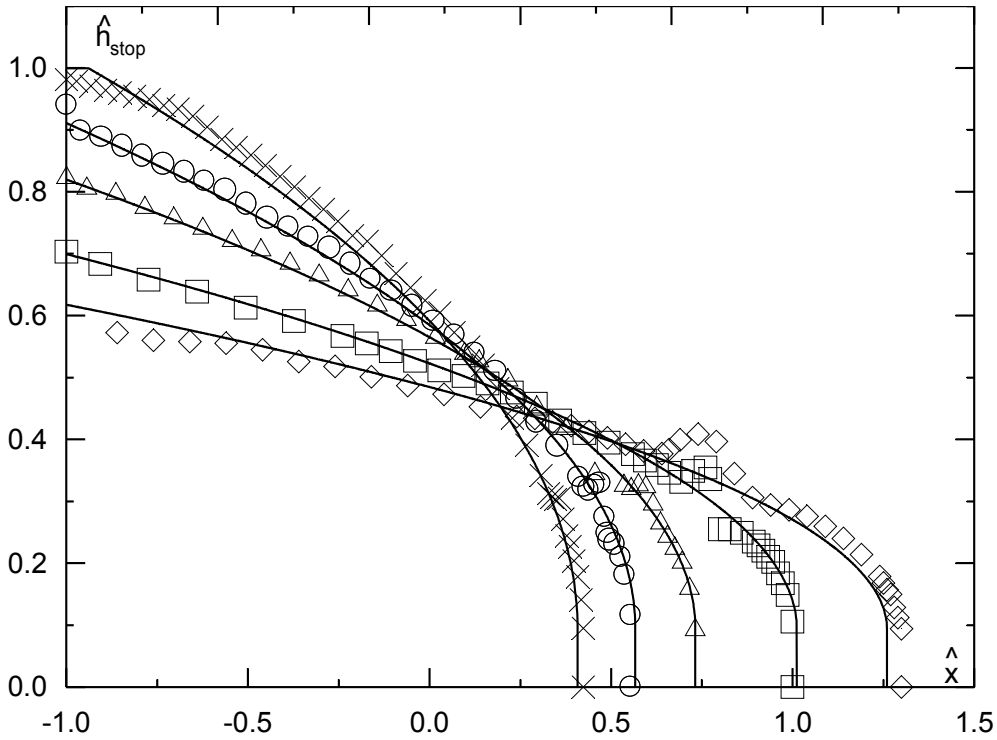


Fig. I-15 Figure I-15 : Profil d'équilibre en fonction de Od ; gel de Carbopol ; fond Horizontal, CARB.5, $\diamond L=100$ mm ($Od=0.061$), $L=150$ mm ($Od=0.092$), $\Delta L=250$ mm ($Od=0.153$), $O L=350$ mm ($Od=0.214$), $\times L=500$ mm ($Od=0.306$),
 ——— Théorie ($\phi = 0.092$)

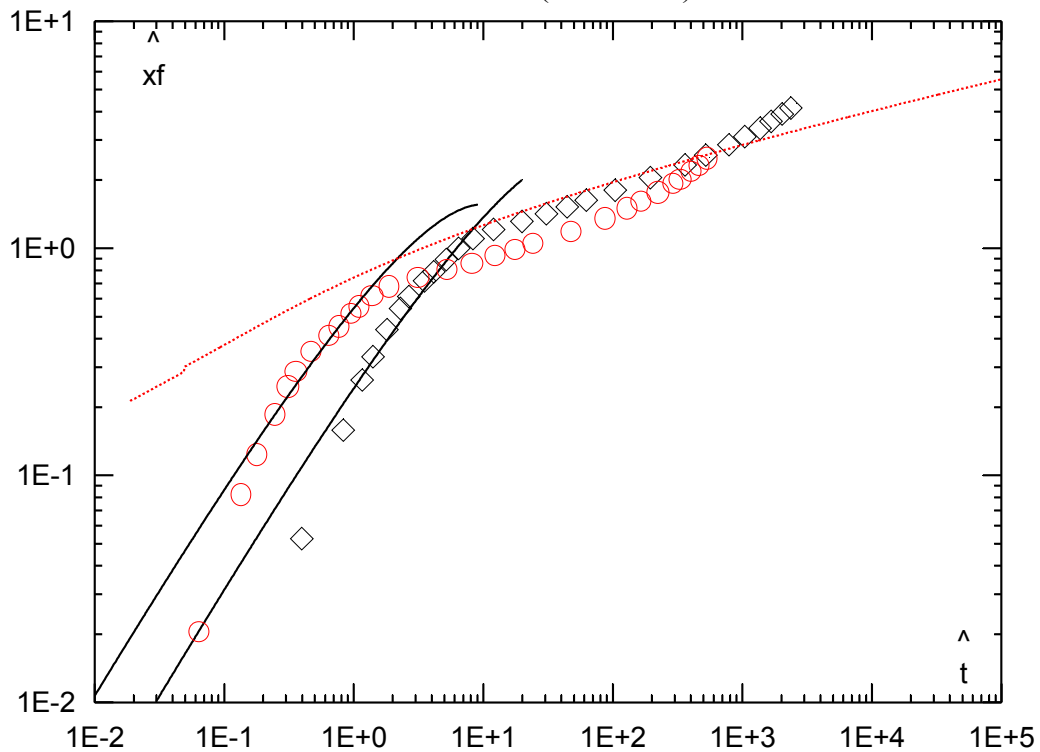


Fig. I-16 Figure I-16 : Evolution de la position du front d'onde en fonction du temps gel de Carbopol, fond incliné, $H=50$ mm, $\Theta=0.034$ s = 11 Pa, $n = 0.45$, $k = 2.6$ Pa.sⁿ
 $\diamond L=285$ mm, $\alpha = 10^\circ$, $Od=0.13$, $Re=10$; $o L=490$ mm, $\alpha = 6^\circ$, $Od=0.221$, $Re=5.8$,
 ——— Théorie du régime principalement inertiel , - - - Théorie visqueuse

