

# Rupture de barrage en régime laminaire : fluides en loi de puissance

## I.1 Théorie de l'eau peu profonde

Le traitement théorique des écoulements à surface libre des fluides complexes, analytique ou numérique, est très rare dans la littérature. Mais il existe (voir les chapitres précédents) un certain nombre d'études sur les écoulements à surface libre avec un modèle Newtonien, motivé par des raisons scientifiques et techniques. Néanmoins, depuis quelques années les efforts de quelques équipes (Johnson et al, Takahashi et al, Coussot et al, O'Brien et al, Liu et al, Huang et al, Piau et al, Arattano et al...) ont permis de progresser dans cette voie. Une préoccupation est de savoir dans quelles conditions les modèles classiques basés sur l'hypothèse d'eau peu profonde peuvent être appliqués aux écoulements de laves torrentielles. A notre connaissance, à l'exception de Piau (1996), les chercheurs se sont contentés d'appliquer les approximations de l'hydraulique classique (qui suppose une répartition de pression hydrostatique), et traite les écoulements variés dans l'approximation locale du frottement uniforme. On peut également distinguer parmi les théories :

- Ceux qui utilisent des modèles viscoplastiques : Johnson (1970), O'brien (1986), Liu & Mei (1989-1990), Van Kessel & Kranenburg (1996), Huang & Garcia (1997) en utilisant le modèle de Bingham, et Coussot (1994), Laigle & Coussot (1997), Coussot & al (1996), Piau (1996), Huang & Garcia (1998) en utilisant le modèle d'Herschel-Bulkley.
- Ceux qui utilisent le modèle de Bagnold (s'appliquent aux laves torrentielles granulaires) : Takahashi (1980-1991).
- Et ceux qui utilisent des modèles qui combinent différentes dissipations, frottement solide, comportement Newtonien ou autres et turbulence (concernent les laves torrentielles peu visqueuses où la turbulence joue un rôle essentiel) : O'Brien et Julien 1993.

Avant d'étudier le cas général avec un fluide viscoplastique, nous considérons dans cette partie le cas d'un fluide en loi de puissance. Ce modèle reste également valable dans le cas d'un fluide viscoplastique, mais seulement aux forts gradients de vitesse. Aux faibles gradient de vitesse, on peut s'attendre aux effets du seuil de contrainte qui fera l'objet du chapitre qui suivra.

Ainsi, l'équation de base à considérer ici est celle du modèle de Saint Venant qui exprime l'équilibre entre les forces de pesanteur, de frottement et d'inertie et qui reste également

valable dans l'approximation de l'eau peu profonde avec un terme de frottement de type laminaire en rapport avec la loi de puissance :

$$U_{,t} + \beta U U_{,x} + g \cos(\alpha) h_{,x} = g(\sin(\alpha) - J) + 0 (\varepsilon^2) \quad (1)$$

Les autres paramètres de cette équation sont déjà définis dans le chapitre sur le problème de rupture de barrage avec un fluide Newtonien.

D'autre part, l'équation de conservation de la masse s'exprime pour un canal rectangulaire :

$$h_{,t} + U h_{,x} + h U_{,x} = 0 \quad (2)$$

Il convient de rajouter à ces deux équations les relations générales qui lient les différentielles locales aux dérivées partielles :

$$dU = U_{,x} dx + U_{,t} dt \quad (3)$$

### 1.1.1 Evaluation de la pente de frottement J

L'écoulement est supposé laminaire et on considère ici que le glissement est nul. On suppose également que la profondeur du fluide varie progressivement de telle sorte que la contrainte tangentielle moyenne à la paroi dans une section quelconque égale à la contrainte à la paroi de l'écoulement uniforme ayant les mêmes valeurs du débit et de la hauteur (approximation locale du frottement de l'hydraulique classique). Ainsi, voir chapitre sur l'écoulement uniforme, pour un modèle en loi de puissance, J peut être représentée par la formule suivante :

$$J = \frac{k}{2\rho g} \alpha(n) \left( \frac{|U|^{n-1}}{D_H^{n+1}} \right) U \quad (4)$$

Pour une section rectangulaire large ( $D_H = 4h$ ), on a :

$$\alpha(n) = 2^{2n+3} \left( 2 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (5)$$

On vérifie dans ce cas que :

$$J = \frac{k}{\rho g} \left( 2 + \frac{1}{n} \right)^n \left( \frac{|U|^{n-1}}{h^{n+1}} \right) U \quad (6)$$

Lorsque  $n = 1$ , on retrouve bien le cas Newtonien déjà traité précédemment.

## 1.2 Théorie visqueuse

Aux temps grands, les phénomènes visqueux deviennent prédominants devant l'inertie et le premier terme de l'équation du mouvement (1) disparaît. Il résulte dans le cas horizontal que :

$$J = - \frac{\partial h}{\partial x} \quad (7)$$

En introduisant l'équation (7) dans l'équation (6) et compte tenu de l'équation de continuité, on aboutit à une équation fortement non-linéaire en fonction de h seulement, soit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{m+2} \left( \frac{\rho g}{2k} \left( \frac{m}{m+1} \right) \right)^m \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( - \frac{\partial}{\partial x} \left( h^{\frac{2(m+1)}{m}} \right) \right)^m \right] = 0 \quad (8)$$

On retrouve bien le cas Newtonien (traité dans le chapitre précédent) lorsque  $m=1$ . Notons également que cette équation admet une solution à variables séparées qui ne vérifie pas les conditions aux limites du problème. Nous retenons alors seulement les solutions semblables. Pour commencer, nous considérons le cas d'un réservoir infiniment long, puis le cas d'un réservoir limité.

### I.2.1 Réservoir infiniment long

Prenons l'exemple d'un fluide placé dans un réservoir de très grande dimension, de telle sorte que loin du barrage le fluide puisse être considéré au repos à la profondeur H. Et afin de simplifier l'équation du mouvement (8), on introduit les variables réduites suivantes, qui ne font pas apparaître la longueur du réservoir L :

$$\left( \tilde{h}, \tilde{x}, \tilde{t} \right) = \left( \frac{h}{H}, \frac{x}{H}, \frac{t}{T} \right) \quad \text{où} \quad T = (m+2) \left( \frac{2(m+1)}{m} \right)^m \left( \frac{k}{\rho g H} \right)^m \quad (9)$$

Le signe  $\sim$  représente les variables adimensionnelles. En remplaçant, l'équation (8) devient :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[ \left( - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \tilde{h}^{\frac{2m+2}{m}} \right) \right)^m \right] = 0 \quad (10)$$

Comme dans le cas Newtonien, nous chercherons des solutions affines de la forme suivante :

$$\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = X_1 \left( \eta = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}_f(\tilde{t})} \right) \quad (11)$$

Les fonctions  $\tilde{x}_f(\tilde{t})$  et  $X_1(\eta)$  peuvent être obtenues par substitution directe dans l'équation du mouvement (10), il résulte :

$$\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{c}_f(m) (\tilde{t} - \tilde{c}_1)^{\frac{1}{m+1}} \quad (12)$$

où  $\tilde{c}_1$  et  $\tilde{c}_f(m)$  sont des constantes. La première est nulle si nous faisons abstraction de l'histoire inertielle de l'écoulement ( $Re$  petit). Tandis que la deuxième peut être déterminée à partir de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d}{d\eta} \left( \left( -\frac{d}{d\eta} \left( X_1^{\frac{2m+2}{m}} \right) \right)^m \right) - \left( \frac{1}{m+1} \tilde{c}_f(m)^{m+1} \right) \eta \frac{dX_1}{d\eta} = 0 \quad (13)$$

Si on fixe  $\tilde{c}_f = 1$ , on devrait alors remplacer  $\tilde{x}_f(\tilde{t})$ , intervenant dans la définition de la variable  $\eta$ , par une fonction  $\tilde{x}_*(\tilde{t})$  qui doit varier comme  $\tilde{x}_f(\tilde{t})$ , soit  $\tilde{x}_*(\tilde{t}) = (\tilde{t} - \tilde{c}_1)^{1/(m+1)}$ . Il est possible donc de résoudre l'équation (13) avec pour conditions aux limites

$$X_1(\eta \rightarrow \infty) = 0; \quad X_1(\eta \rightarrow -\infty) = 1 \quad (14)$$

Et de déduire ensuite  $\tilde{c}_f(m)$  qui correspond à  $X_1(\tilde{c}_f(m)) = 0$ . Mais ici encore la solution analytique n'est pas évidente. Néanmoins, on peut trouver une solution approchée à l'aide de développements en série autour de  $\eta = 1$ . Pour cela, il est avantageux d'exprimer l'équation (13) comme suit :

$$\left( \frac{df}{dp} \right)^{m-1} \left[ (2m+1)f \frac{d^2f}{dp^2} + \left( \frac{df}{dp} \right)^2 \right] + p \frac{df}{dp} - \frac{df}{dp} = 0 \quad (15)$$

où

$$X_1(\eta) = \left[ \left( \frac{2m+1}{2m+2} \right) \left( \frac{1}{m+1} \right)^{1/m} \tilde{c}_f(m)^{\frac{m+1}{m}} f(p) \right]^{\frac{m}{2m+1}} ; \quad p = 1 - \eta \quad (16)$$

avec  $f(0) = 0$ . En utilisant le développement de Taylor au voisinage de  $p=0$  en commençant par un terme proportionnel à  $p$ , et après substitution et identification terme à terme les puissances de  $p$ , on obtient :

$$f(p) \approx p - \frac{1}{2(3m+1)} p^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{5m+3-5m^2}{(5m+2)(3m+1)^2} \right) p^3 + \frac{1}{24} \left( \frac{109m^3 + 45m^2 - 70m^4 - 48m - 18}{(3m+1)^3(5m+2)(7m+3)} \right) p^4 + \dots \quad (17)$$

Le premier terme de cette série montre qu'au voisinage du front, i. e.  $\hat{x} \rightarrow \hat{x}_f$ , la hauteur varie comme  $(x_f - x)^{m/(2m+1)}$ . Notons que l'équation (17) est une approximation raisonnable du profil de la surface libre, mais elle nécessite de connaître la valeur de  $\tilde{c}_f(m)$ . Pour cela, nous avons résolu numériquement l'équation différentielle (13). Le procédé de calcul est identique au cas particulier étudié dans le chapitre avec un modèle Newtonien ( $m=1$ ). Ici encore, il est possible de définir une position arrière critique  $\tilde{x} = \tilde{x}_b(\tilde{t})$  telle que  $h$  soit égal à  $0.99H$  :

$$\tilde{x}_b = -\tilde{c}_b(m) (\tilde{t} - \tilde{c}_1(m))^{\frac{1}{m+1}} \quad \text{pour} \quad \tilde{h} = 99\% \quad (18)$$

Les fonctions  $\tilde{h}_d(m)$ ,  $\tilde{c}_b(m)$  et  $\tilde{c}_f(m)$  sont calculées numériquement. Les données ont été calées par la méthode des moindres carrés sur les lois suivantes :

$$\tilde{h}_d(m) \approx \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{0.135}{0.265 + m} \quad \text{erreur} < 0.02\% \quad (19)$$

$$\tilde{c}_b(m) \approx \frac{2}{3} + \frac{3.135m + 1.492}{m^2} \quad \text{erreur} < 1.1\% \quad (20)$$

$$\tilde{c}_f(m) \approx \frac{1}{3} + \frac{0.944}{(m + 0.548)^{0.85}} \quad \text{erreur} < 0.4\% \quad (21)$$

où  $\tilde{h}_d(m) = h_d / H = X_1(0)$  est la profondeur de l'écoulement à  $\tilde{x} = 0$ . Notons que le premier terme de chaque formule représente la solution du problème lorsque  $m \rightarrow \infty$ .

La fonction  $X_1(\eta)$  qui donne le profil de l'écoulement, est représentée sur la figure 1, cela pour trois valeurs de  $m$  (2, 8 et  $\infty$ ). Pour  $m$  grand une discontinuité de la pente de la surface libre apparaît à  $\tilde{x} = \tilde{x}_b(\tilde{t})$ . Remarquons également que l'augmentation du paramètre  $m$  tend à diminuer la concavité du profil de la surface libre. Enfin, notons que l'approximation du profil de la surface libre représentée par l'équation (17) donne des résultats meilleurs que 4%, cela évidemment dans le domaine  $[\tilde{x}_b, \tilde{x}_f]$ .

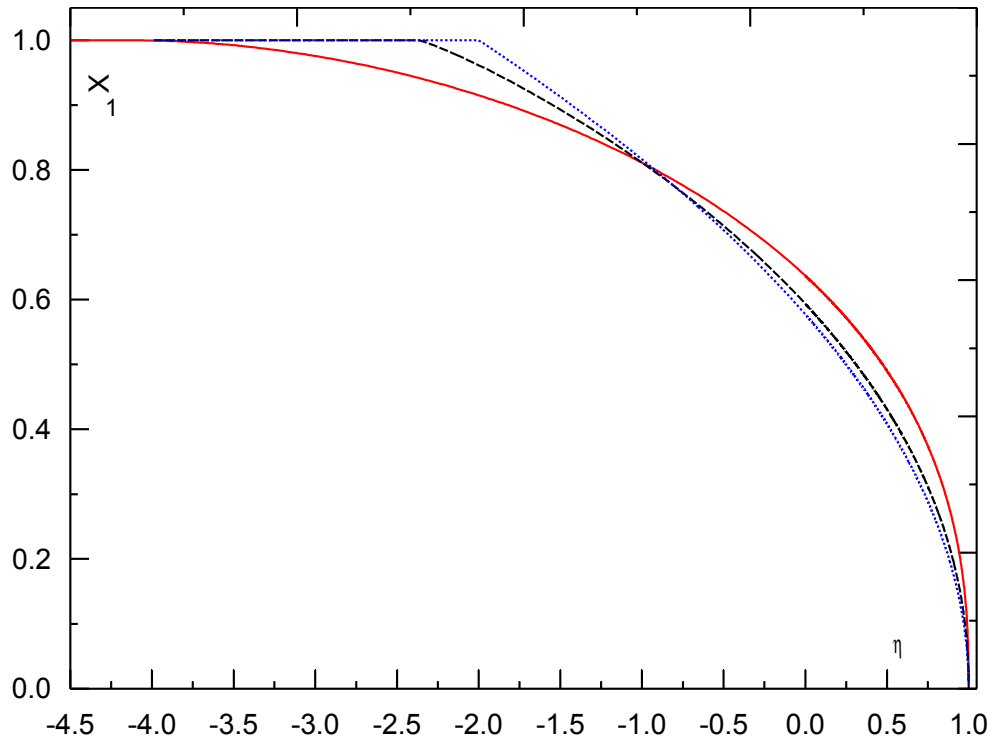


Figure 1 : Forme du profil d'écoulement en fonction de l'indice de Rhéofluidification, modèle d'Ostwald), premier régime visqueux, fond horizontal

—  $m = 2$       - - -  $m = 8$       ····  $m = 00$

## Réservoir fini

Comme dans le cas Newtonien, un changement du régime d'écoulement peut apparaître lorsqu'on commence à sentir une variation notable de la profondeur du fluide à l'extrémité amont du réservoir. Il est plus convenable dans ce cas de remplacer les variables adimensionnelles (équation 9) par :

$$\left(\hat{h}, \hat{x}, \hat{t}\right) = \left(\frac{h}{H}, \frac{x}{L}, \frac{t}{T}\right) \quad \text{où} \quad T = (m+2) \left(\frac{2(m+1)}{m}\right)^m \left(\frac{k}{\rho g H}\right)^m \left(\frac{L}{H}\right)^{m+1} \quad (22)$$

dont on fait apparaître l'influence de la longueur initiale du réservoir. Le signe ^ indique les paramètres adimensionnels de ce régime d'écoulement. Ainsi, l'équation (8), se réécrit :

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[ \left( - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \hat{h}^{\frac{2m+2}{m}} \right) \right)^m \right] = 0 \quad (23)$$

Il convient également d'associer cette équation à l'équation qui traduit la conservation au cours du temps de la quantité initiale du fluide, soit :

$$\int_{-1}^{\hat{x}_f} \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) d\hat{x} = 1 \quad (24)$$

Pour la résolution, nous chercherons, comme dans le cas Newtonien, des solutions affines de la forme :

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t}) X_2 \left( \eta = \frac{\hat{x} + 1}{\hat{x}_f(\hat{t}) + 1} \right) \quad (25)$$

où la variable  $\eta$  est définie dans ce cas dans l'intervalle  $[0,1]$ . Les fonctions  $\hat{x}_f(\hat{t})$ ,  $\hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t})$  et  $X_2(\eta)$  sont obtenues par substitution directe dans les deux équations (23) et (24), il résulte :

$$\hat{x}_f(\hat{t}) = \hat{c}_f(m) [\hat{t} + \hat{c}_2]^{\frac{1}{3m+2}} - 1 \quad (26)$$

$$\hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t}) = \frac{1}{a(m)(\hat{x}_f(\hat{t}) + 1)} \quad (27)$$

avec

$$a(m) = \int_0^1 X_2(\eta) d\eta ; \quad \hat{c}_f(m) = \left( \frac{(3m+2)}{a(m)^{2m+1}} \left( \frac{2(m+1)^2}{m(2m+1)} \right)^m \right)^{\frac{1}{3m+2}} \quad (28)$$

où  $\hat{c}_2$  est une constante d'intégration, elle est nulle si nous négligeons l'histoire de

l'écoulement. Les constantes  $a(m)$  et  $\hat{c}_f(m)$  peuvent être déterminées à partir de l'équation différentielle suivante:

$$-\left(\frac{m(2m+1)}{2(m+1)^2}\right)^m \frac{d}{d\eta} \left( \left( -\frac{d}{d\eta} \left( X_2^{\frac{2m+2}{m}} \right) \right)^m \right) + X_2 + \eta \frac{\partial X_2}{\partial \eta} = 0 \quad (29)$$

Compte tenu des conditions aux limites :  $X_2(0) = 1$  et  $dX_2/d\eta = 0$  à  $\eta = 0$ , on obtient :

$$X_2(\eta) = \left( 1 - \eta^{\frac{1+m}{m}} \right)^{\frac{m}{2m+1}} \quad (30)$$

La fonction  $X_2(\eta)$  qui donne le profil de l'écoulement, est représentée sur la figure 2, cela pour quatre valeurs de  $m$  (2, 3, 8 et  $\infty$ ). Pour  $\eta$  donné,  $X_2(\eta)$  diminue donc avec l'augmentation de  $m$ .

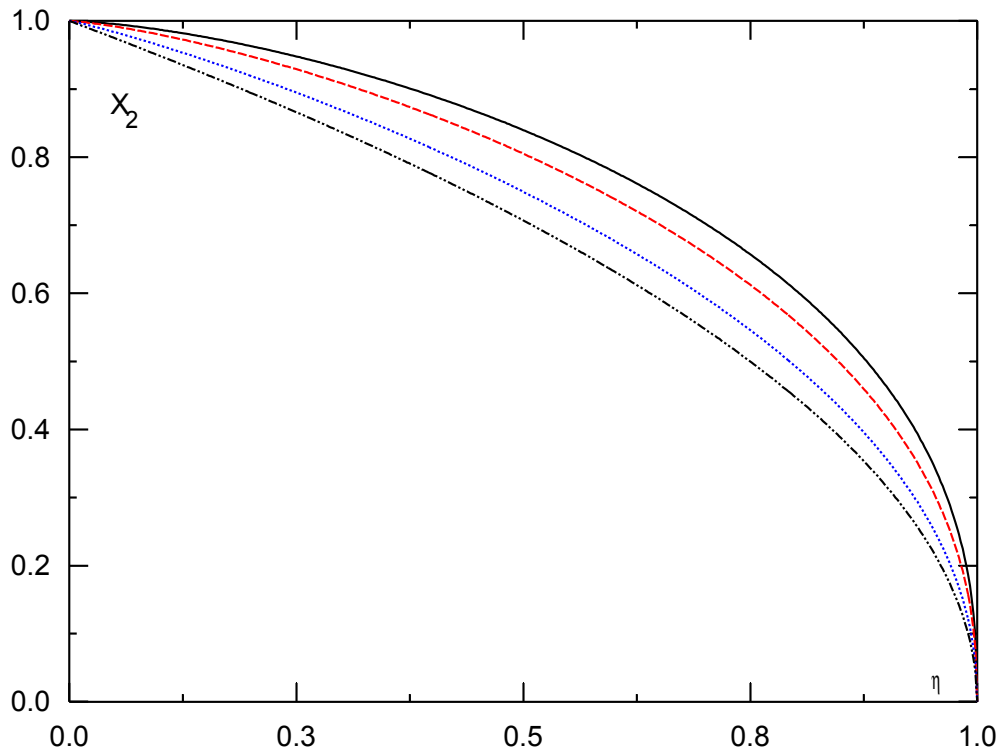


Figure 2 : Forme du profil d'écoulement en fonction de l'indice de Rhéofluidification, modèle d'Ostwald), deuxième régime visqueux, fond horizontal

—  $m = 2$     - - -  $m = 3$     ·····  $m = 8$     - · - ·  $m = 00$

Par commodité d'utilisation, nous proposons pour calculer  $a(m)$  l'expression approchée suivante :

$$a(m) \approx \frac{2}{3} + \frac{0.297}{m + 0.705} \quad \text{erreur} < 0.13\% \quad (31)$$

Le lecteur peut vérifier que ces relations ne sont valable que si  $\hat{x}_f(\hat{t}) > (1 - a(m))/a(m)$ .

Sinon, à l'amont, on obtient des profondeurs supérieures à  $H$  contredisant ainsi la physique de l'écoulement. Il faut naturellement considérer aux temps petits notre première analyse, i. e. supposer que le réservoir est infiniment long.

D'autre part, en cherchant à quelle condition la dérivée de  $\hat{h}$  par rapport  $\hat{t}$  est nulle, on aboutit aux résultats suivants :

Pour une station située en aval du barrage, la hauteur maximale  $\hat{h}_{\max}(\hat{x})$  est donnée par :

$$\hat{h}_{\max}(\hat{x}) = \left( \frac{m+1}{3m+2} \right)^{\frac{m}{2m+1}} \left( \frac{2m+1}{3m+2} \right)^{\frac{m}{m+1}} \frac{1}{a(m)} (\hat{x}+1)^{-1} \quad (32)$$

Cette hauteur est atteinte à un temps  $\hat{t}_{\max}(\hat{x})$  tel que :

$$\hat{t}_{\max}(\hat{x}) = \frac{1}{\hat{c}_f(m)^{3m+2}} \left( \frac{3m+2}{2m+1} \right)^{\frac{m(3m+2)}{m+1}} (\hat{x}+1)^{3m+2} - \hat{c}_2(m) \quad (33)$$

dont la position du front correspondante est :

$$(\hat{x}_f(\hat{t}_{\max})+1) = \left( \frac{3m+2}{2m+1} \right)^{\frac{m}{m+1}} (\hat{x}+1) \quad (34)$$

### 1.3 Etude de la transition Inertie/Visqueux

Comme dans le cas Newtonien, pour un fluide en loi de puissance et en supposant que le glissement est nul, l'écoulement dans sa phase initiale dépend d'un nombre adimensionnel définit comme étant le nombre de Reynolds :

$$Re_H = \frac{\rho H^n (\sqrt{gH})^{2-n}}{k} \quad (35)$$

Si  $Re_H$  est très grand (ou plus correctement si le temps réduit ' $t^*$ ' est très inférieur devant  $Re_H$ ), le régime est inertiel et la solution de Ritter peut être appliquée. Si au contraire  $t^* \gg Re_H$ , le régime d'écoulement est visqueux et la solution établie dans ce cadre peut être une approximation raisonnable. Cependant, une forte transition devrait exister lorsque  $t^*$  est de l'ordre de grandeur que  $Re_H$ . Nous proposons ici l'étude de cette transition en faisant abstraction de la tension superficielle et du glissement.

Comme dans le cas Newtonien, on définit un point particulier  $x = \zeta(t)$ . En aval de  $\zeta(t)$ , région supérieure, on suppose que les effets du frottement visqueux sont minimes, mais non négligeables. En amont de  $\delta(t)$ , région frontale, on considère que les effets d'inertie sont négligeables.



### 1.3.1 Etude de la région supérieure

Compte tenu des hypothèses réalisées, la pente de frottement varie dans ce cas comme  $U^n / h^{n+1}$ . Pour trouver une solution approximative dans cette région, nous développerons la même stratégie que dans le cas Newtonien. Ainsi, l'équation dynamique se réécrit en fonction du couple  $(C^*, U^*)$ , comme suit :

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + 2C^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = - \frac{1}{Re_H} \left( \frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{U^{*n}}{C^{*2(n+1)}} \quad (36)$$

Notons que l'équation de conservation de la masse (2) reste toujours valable. Pour simplifier les écritures, on introduit la variable  $\tau$  :

$$\tau = \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n \left( \frac{1}{Re_H} \right) t^* \quad (37)$$

En supposant, comme dans le cas Newtonien, qu'on peut faire un développement de  $U^*$  et  $C^*$  en puissance de paramètre  $\tau$ . En substituant dans les équations du mouvement, et en identifiant ensuite terme à terme, il résulte à l'ordre 0 :

$$U_0(\eta) = c_0 - \frac{2}{3}\eta; \quad C_0(\eta) = \frac{1}{3}\eta \quad (38)$$

où la variable  $\eta = c_0 - x^*/t^*$  a été introduite,  $c_0$  est une constante d'intégration.

A l'ordre 1, on aboutit à :

$$U_1(\eta) = \frac{3^{2(n+1)} c_0^n}{4} \eta^{-2(n+1)} \left[ A(n) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i(n) \eta^i \right] + c_1(n) \eta^{3/2} \quad (39)$$

$$C_1(\eta) = \frac{3^{2(n+1)} c_0^n}{10} \eta^{-2(n+1)} \left[ \frac{7}{4} A(n) + 3 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{7}{4} B_i(n) + 3D_i(n) \right) \eta^i \right] + \frac{7}{10} c_1(n) \eta^{3/2} \quad (40)$$

avec

$$A(n) = - \frac{12+4n}{4n+7}; \quad D_i(n) = \left( \frac{2}{3c_0} \right)^i \left( \prod_{j=1}^i (n-j+1) \right) \frac{(-1)^i}{i!}; \quad B_i(n) = \frac{12-2i+4n}{2i-4n-7} D_i(n) \quad (41)$$

Si la vitesse d'onde négative égale à la valeur de Ritter, i. e.  $e = -\sqrt{gH}$  ( $\eta = 3$ ), il vient  $c_0 = 2$

et

$$c_1(n) = - \frac{2^{n-2} \sqrt{3}}{9} \left[ A(n) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i(n) 3^i \right] \quad (42)$$

La variable  $\eta$  est définie dans l'intervalle  $]0,3[$

### Remarque

Comme dans le cas Newtonien, ces approximations trouvent des limites d'application au voisinage du front. En effet, la profondeur du fluide devrait être nulle à l'abscisse du front d'onde. D'autre part, le frottement pariétal est inversement proportionnel à  $h^{n+1}$  (équation (6)). Par conséquent, le frottement visqueux dans cette région est grand pour que l'approximation introduite dans la région supérieure soit valable. Une solution cependant existe qui revient à traiter cette région frontale séparément en supposant que le terme visqueux y domine tous les autres termes d'inertie.

D'autre part, il est simple de vérifier que ces approximations ne peuvent être vraies que si la condition au bord amont du réservoir n'intervient pas. C'est-à-dire avant que l'onde inertielle de Ritter n'atteigne cette extrémité amont de l'écoulement, soit :

$$\tau < \frac{1}{Re_H} \left( \frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{L}{H} \quad (43)$$

Postérieurement, si on ne néglige pas l'inertie, le problème devient assez difficile à résoudre analytiquement aussi bien que numériquement.

### 1.3.2 Etude de la région frontale

Nous supposons ici que les grands termes

$$2C^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} \quad , \quad - \frac{1}{Re_H} \left( \frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{U^{*n}}{C^{*2(n+1)}}$$

intervenant dans l'équation (36) sont égaux. Donc on néglige dans la région frontale tous les termes d'inertie. A l'ordre 0 ( $U^*(x^*, t^*) \approx U_f^*(t^*)$ ), on a :

$$C^*(x^*, t^*) \approx \left[ \frac{(n+2)}{Re_H} \left( \frac{1+2n}{n} \right)^n U_f^*(t^*)^n (x_f^* - x^*) \right]^{\frac{1}{2n+4}} \quad (44)$$

On suppose alors que  $U^*$  et  $C^{*2n+4}$  peuvent être exprimés en puissance de  $(x_f^* - x^*)$  ou le mieux, si on veut garder les mêmes normalisations que l'analyse précédente, en série de  $(\eta - \eta_f)$  où  $\eta_f$  représente l'abscisse du front d'onde en variable  $\eta$ . On obtient à l'ordre 1 :

$$U^*(x^*, t^*) = U^*(\eta, \tau) \approx U_f^*(\tau) + \frac{n}{n+3} \frac{1}{U_f^*(\tau)} \frac{dU_f^*(\tau)}{d\tau} \tau (\eta - \eta_f) + \dots \quad (45)$$

$$C^*(x^*, t^*) \approx (n+2) \frac{1}{2^{2n+4}} \left[ U_f^*(\tau)^n \tau (\eta - \eta_f) + \frac{n^2}{2(n+3)} U_f^*(\tau)^{n-2} \frac{dU_f^*(\tau)}{d\tau} \tau^2 (\eta - \eta_f)^2 + \dots \right]^{\frac{1}{2n+4}} \quad (46)$$

avec  $U_f^*(\tau) = dx_f^*/dt^*$ . Il reste maintenant à évaluer  $U_f^*(\tau)$ , i. e la vitesse du front d'onde.

### 1.3.3 Evaluation de la vitesse du front

Pour cela, on suppose que la transition entre la région supérieure et la région frontale est négligeable. En plus, en tenant compte uniquement des premiers termes dans les équations (45) et (46), il vient :

$$U^*(x^*, t^*) = U^*(\eta, \tau) \approx U_f^*(\tau) + \dots \quad (47)$$

$$C^*(x^*, t^*) \approx (n+2) \frac{1}{2^{2n+4}} \left[ U_f^*(\tau)^n \tau (\eta - \eta_f) + \dots \right]^{\frac{1}{2n+4}} \quad (48)$$

Désignons  $H_\zeta^*$  et  $U_\zeta^*$ , en variables réduites, comme la profondeur et la vitesse moyenne à  $x = \zeta(t)$ . Pour évaluer ces paramètres, on considère qu'on est dans ce cas lorsque dans la région supérieure  $\partial U^*/\partial \eta = 0$ , qui semble correspondre à l'abscisse à partir de laquelle l'approximation de la région supérieure devient inexacte, il résulte :

$$\tau = \left( \frac{2^{3-n}}{3^{2n+3}} \right) \eta_\zeta^{2n+3} \frac{1}{\left[ -2(n+1)A(n) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i(n)(i-2(n+1))\eta_\zeta^i \right] + \frac{3}{2}c_1\eta_\zeta^{1/2}} \quad (49)$$

Pour chaque valeur  $\eta_\zeta$  (entre 0 et 3), on peut calculer  $\tau$  et on déduit ensuite, en remplaçant dans les formules de la région supérieure, les valeurs  $U_\zeta^*$  et  $H_\zeta^*$  correspondantes. En remplaçant dans (50), on déduit l'abscisse du front d'onde, soit :

$$\eta_f = \eta_\zeta - \frac{C_\zeta^{*2n+4}}{(n+2)\tau U_f^*(\tau)^n} \quad (50)$$

Il vient pour  $\tau$  petit :

$$U_f^*(\tau) \approx 2 - \chi_1(n)\tau^{\frac{1}{2n+3}} \quad \text{avec} \quad \chi_1(n) = \left( \frac{2n+3}{n+1} \right) \left[ \frac{(n+1)(3+n)2^n}{(4n+7)} \right]^{\frac{1}{2n+3}} \quad (51)$$

qui a la même structure que la relation établie par Piau en utilisant une autre stratégie (voir Ayadi 1996). Le premier terme représente la solution inertielle de Ritter, et le second terme représente l'influence de petites perturbations visqueuses dans un écoulement principalement inertiel. Ce deuxième terme varie comme  $t^{1/(2n+3)}$ .

On obtient aussi dans ce cas :

$$\eta_{\zeta}(\tau) \approx \Psi_1 \tau^{\frac{1}{2n+3}} \quad \text{avec} \quad \Psi_1(n) = 3 \left[ \frac{(n+1)(3+n)2^n}{(4n+7)} \right]^{\frac{1}{2n+3}} \quad (52)$$

et

$$C_{\zeta}^*(\tau) \approx \Psi_2 \tau^{\frac{1}{2n+3}} \quad \text{avec} \quad \Psi_2(n) = \frac{1}{6} \frac{9n+2n^2+6}{(n+1)(n+3)} \Psi_1(n) \quad (53)$$

On déduit :

$$\eta_f^*(\tau) \approx \Psi_3 \tau^{\frac{1}{2n+3}} \quad \text{avec} \quad \Psi_3 = \Psi_1 \left( 1 - \frac{\Psi_2^{2(n+2)}}{(n+2)2^n \Psi_1} \right) \quad (54)$$

On propose pour  $\tau$  relativement grand les formules approchées suivantes :

$$\eta_{\zeta}(\tau) \approx \Psi_1 \left( 1 - 0.2n\tau^{\frac{1}{2n+3}} \right) \tau^{\frac{1}{2n+3}} \quad (55)$$

et

$$\eta_f^*(\tau) \approx \Psi_3 \left( 1 - 0.361n^{0.381} \tau^{\frac{1}{2n+3}} \right) \tau^{\frac{1}{2n+3}} \quad (56)$$

Ainsi, le problème est totalement défini. Il est possible donc de tracer séparément la région frontale et la région supérieure, et raccorder tout simplement les deux à partir de leur point d'intersection.

#### 1.4 Solution approchée globale

Comme dans le cas Newtonien, nous proposons ici une solution approchée globale qui regroupe les différents régimes d'écoulement étudiés précédemment. Nous commençons par évaluer les transitions résultantes. Nous espérons pour cela réduire au maximum l'écart en assurant la continuité de  $x_f$  le long de l'écoulement.

##### Passage au premier régime visqueux

Comme dans le cas Newtonien, nous supposons que le passage au régime visqueux se produit lorsque  $x_{\zeta} = 0$ . En remplaçant dans l'équation (49)  $\eta_{\zeta} = 2$ , on obtient le temps  $\tau_c(m)$  (ou en variable  $\hat{t}_{c1}$ ) au delà le régime d'écoulement peut être considéré comme visqueux. D'après l'approximation représentée par l'équation (52), on est aussi dans ce cas lorsque :

$$\tau_c \approx \left( \frac{2}{\Psi_1} \right)^{2m+3} \quad (57)$$

L'abscisse du front lors du passage (noté  $\hat{x}_{f1}$  en variable  $\wedge$ ) est obtenue en remplaçant dans l'équation (56)  $\tau = \tau_c(m)$ . Par continuité de la fonction  $x_f$ , on détermine ensuite la constante  $\tilde{c}_1$  intervenant dans l'équation (12), soit :

$$\tilde{c}_1(m, Re) \approx \hat{t}_{c1}(m, Re) - \left( \frac{\hat{x}_{f1}(m, Re)}{\tilde{c}_f(m)} \right)^{m+1} \quad (58)$$

### Passage au deuxième régime visqueux

Cette transition peut être évaluée de deux manières différentes ; soit en supposant que le passage coïncide avec  $\hat{x}_b = -1$ , ou en supposant que la transition se produit lorsque le deuxième régime visqueux devient valable. Notons que les deux donnent des résultats très proches. En désignant ainsi  $\hat{x}_{f2}(m)$  comme l'abscisse du front lors du passage (en variable  $\wedge$ ) et  $\hat{t}_{c2}(m, Re)$  le temps correspondant, il résulte compte tenu de la deuxième analyse (déduite à partir de l'équation (27)) :

$$\hat{x}_{f2}(m) \approx \frac{1 - a(m)}{a(m)} \quad (59)$$

En remplaçant dans l'équation (12), on déduit :

$$\hat{t}_{c2}(m, Re) \approx \tilde{c}_1(m, Re) + \left( \frac{\hat{x}_{f2}(m)}{\tilde{c}_f(m)} \right)^{m+1} \quad (60)$$

et compte tenu de la continuité de la fonction  $\hat{x}_f$ , on détermine la constante  $\hat{c}_2$  intervenant dans l'équation (26) :

$$\hat{c}_2(m, Re) \approx \hat{t}_{c2}(m, Re) - \left( \frac{\hat{x}_{f2}(m) + 1}{\hat{c}_f(m)} \right)^{3m+2} \quad (61)$$

Remarquons que ce calcul suppose l'existence du premier régime visqueux, qui devrait être vraie lorsque :

$$Re_H < Re_{H \lim} = \frac{(2 + m)^{1/m} L}{\tau_c(m) H} \quad (62)$$

Si  $Re_H > Re_{H \lim}$ , on définit la transition ( $\hat{x}_{f3}$ ,  $\hat{t}_{c3}$ ) comme le point d'intersection de la courbe globale calculée pour  $Re_H = Re_{H \lim}$  avec la courbe du premier régime d'écoulement (équation

(56)), calculée avec la vraie valeur de  $Re_H$ .

### La forme globale de la solution approchée

Etant donné que les transitions sont maintenant évaluées, on peut annoncer notre solution approchée. Les variables choisies sont de type  $\hat{\cdot}$  (équation (22)). L'écoulement dépend donc du nombre de Reynolds 'Re' et de l'indice de rhéofluidification 'm'. La solution est donc de la forme suivante :

$$\hat{h} = \hat{h}(\hat{x}, \hat{t}, Re, m); \quad \hat{U} = \hat{U}(\hat{x}, \hat{t}, Re, m); \quad \hat{x}_f = \hat{x}_f(\hat{t}, Re, m)$$

avec

$$Re = \frac{\rho H^{1/m} (\sqrt{gH})^{\frac{2m-1}{m}} H}{k L}$$

Les expressions approchées de la solution est représentée précédement. La phase de l'écoulement sans glissement et sans les effets de la tension superficielle est donc caractérisée.

On retrouve bien le cas Newtonien lorsque  $m = 1$  ou  $n = 1$