

# Consistométrie des fluides d'Herschel-Bulkley dans un canal rectiligne

## Résumé

Ce travail a comme objectif d'établir une base expérimentale pour un nouveau rhéomètre, très économique et facilement utilisable pour avoir des valeurs sur la consistance des matériaux visqueux ou viscoplastiques (consistomètre). L'étude peut servir en outre à comprendre les écoulements des boues dans la nature (laves torrentielles). Nous traitons finalement un problème de rupture de barrage avec un fluide synthétique qui suit le modèle d'Herschel-Bulkley. Nous avons également effectué une étude comparative avec des approches analytiques établies dans un rapport précédent. L'étude expérimentale a été réalisée dans un canal prismatique de section rectangulaire. L'évolution en fonction du temps du front d'onde est mesurée à l'aide d'une caméra rapide, tandis que la mesure des profondeurs de l'écoulement est réalisée grâce à un système ultrasonique. L'intérêt de ces méthodes est de permettre des mesures sans contact avec le liquide, et une bonne précision. Dans ces conditions, il est possible de vérifier qu'on réalise un bon accord entre la théorie et l'expérience.

## 1 Introduction

Les fluides viscoplastiques concernent une gamme large de matières incluant les produits agroalimentaires et cosmétiques, les écumes, les composites, les graisses, les bétons, les mélanges eau-charbons, les vases, le charbon liquide, les boues résiduaires, les boues de forage, les encres, les peintures, les mélanges eau-argiles, les vases (Bird & al 1983, Utracki 1988). Le besoin des industriels, en matière de comportement mécanique de ces matériaux est liés surtout à la possibilité de comparer entre les différents matériaux du point de vue de leur résistance à l'écoulement. Dans l'industrie agroalimentaire (comme dans de nombreux autres domaines), on utilise souvent des appareils, appelés consistomètres. Une quantité donnée du fluide est mise tout d'un coup en écoulement sous l'effet de la gravité. On provoque ainsi un front d'onde. A un temps donné, on mesure les abscisses du front qui sont ensuite utilisées pour comparer empiriquement les résultats obtenus avec divers matériaux. Parmi ces instruments, on peut citer le consistomètre de Bostwick et le consistomètre d'Adam. Le premier est de forme rectiligne, tandis que le deuxième est de forme cylindrique.

Le but particulier de ce travail est d'examiner le domaine de validité des approches analytiques établies dans le rapport précédent pour un nouveau rhéomètre (consistomètre) facilement utilisable pour avoir des valeurs sur la consistance des matériaux visqueux ou viscoplastiques. Le problème traité est finalement comme un problème de rupture de barrage où une quantité du fluide est maintenue derrière un mûre vertical dans un canal horizontal rectiligne. Le fluide est initialement au repos avec un fond aval sec et une rupture instantanée de barrage (figure 1).

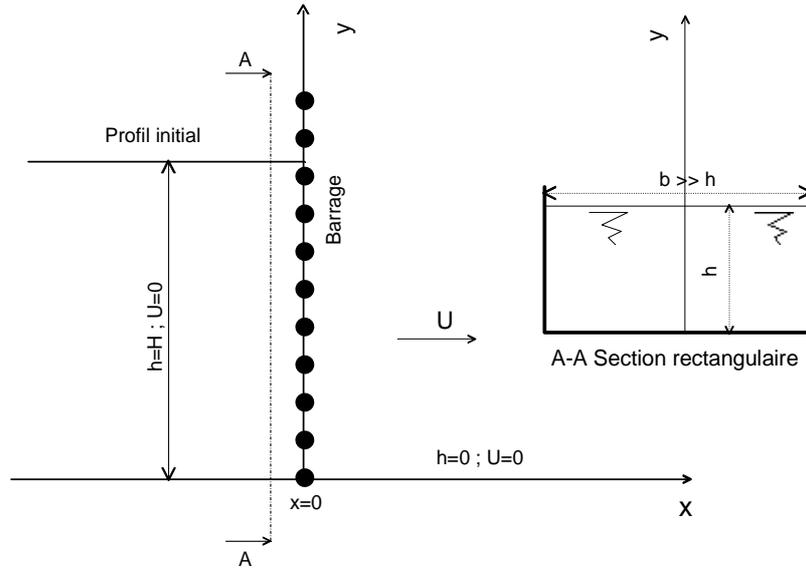


Fig. 1 : Etat du canal à  $t=0$  ; définitions et système de coordonnées

La littérature traite le problème dans l'approximation de l'eau peu profonde, qui suppose que la répartition de la pression le long d'une section transversale est hydrostatique (Barré de Saint Venant 1871). La première solution analytique, dont le frottement pariétal est supposé nul, a été donnée par Ritter (1892). Le front d'onde avance avec une vitesse constante égale à  $2\sqrt{gH}$ , tandis que l'onde négative (caractérisée par une hauteur égale à la profondeur initiale de l'écoulement "H") recule avec une vitesse constante  $\sqrt{gH}$ . Entre ces deux extrémités, la vitesse moyenne  $U$  et la profondeur du fluide  $h$  sont données par :

$$U = \frac{2}{3} \left( \frac{x}{t} + \sqrt{gH} \right) \quad [ 1 ]$$

$$\sqrt{gh} = \frac{1}{3} \left( 2\sqrt{gH} - \frac{x}{t} \right) \quad [ 2 ]$$

où  $x = 0$  correspond à l'emplacement du barrage (dans tout le document les abscisses seront toujours comptées à partir de cette position),  $t$  est le temps et  $g$  étant l'accélération de pesanteur.

Il est simple de vérifier que la solution prévoit que la section du barrage est une position critique : la profondeur du fluide  $h = h_d$ , la vitesse moyenne débitante  $U = U_d$ , le débit  $q = q_d$ , et le nombre de Froude  $Fr = Fr_d$  sont constants, soit :

$$h_d = \frac{4}{9} H; \quad U_d = \frac{2}{3} \sqrt{gH}; \quad q_d = h_d U_d = \frac{8}{27} \sqrt{gH^3}; \quad Fr = Fr_d = 1 \quad [ 3 ]$$

Par conséquent tous les profils de la surface libre pivotent autour de la section du barrage.

La solution de Ritter décrit bien les résultats expérimentaux obtenus avec l'eau (Dressler 1954, Schoklitsch 1917) hormis dans la zone du front d'épaisseur quasi nulle. Il faut naturellement considérer le frottement visqueux dans cette région. Dans ce but, Dressler (1952-1954), puis Witham (1955) utilisent l'approximation locale de l'hydraulique classique pour représenter le frottement pariétal : le comportement de chaque tranche du fluide est similaire au comportement de la tranche dans un écoulement uniforme. Servant ainsi de la formule empirique de Chézy (de type turbulente), chaque auteur analyse le problème différemment, et donnent des approximations de la vitesse du front d'onde.

Ce cas est différent de celui visé dans ce travail. Nous traitons ici le cas des fluides très consistants qui peuvent être évalués à partir du modèle viscoplastique d'Herschel-Bulkley. Le modèle s'écrit en cisaillement simple, comme suit :

$$\begin{aligned} \tau &= s + k|\dot{\gamma}|^n & \text{si } \tau \geq s \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{si } \tau < s \end{aligned} \quad [ 4 ]$$

où  $s$  est le seuil de contrainte,  $k$  étant la consistance du fluide,  $n$  est l'indice de rhéofluidification, et  $\tau$  et  $\dot{\gamma}$  sont la contrainte tangentielle et le gradient de vitesse, respectivement.

L'hypothèse de base de la modélisation mathématique consiste à supposer qu'on a affaire dans ce cas à un fluide beaucoup plus consistant que l'eau et la tendance à l'écoulement turbulent est moins prononcée. On est amené alors à supposer que l'écoulement est laminaire et on sert ensuite de la loi de comportement du fluide pour représenter le frottement. A notre connaissance, il n'existe pas à l'heure actuelle un critère relatif à la transition laminaire-turbulent valable pour un modèle d'Herschel-Bulkley. Dans une conduite circulaire et un modèle en loi de puissance, Darby (1986) propose la relation empirique suivante :

$$Re \left[ = \frac{\rho U^{2-n} D_H^n}{k} \right] < Re_c \left[ \approx 0.125 \left( \frac{2(1+3n)}{n} \right)^n (2100 + 875(1-n)) \right] \quad [ 5 ]$$

Dans le problème de rupture de barrage, la valeur du nombre de Reynolds 'Re' est maximale aussitôt après la rupture (solution de type Ritter est valable dans ce cas) et à l'endroit même du barrage. En négligeant dans ces instants les effets plastiques, il résulte compte tenu de la solution de Ritter et l'équation ( 5 ) (supposé rester valable même dans le problème de rupture de barrage), que le régime est laminaire lorsque :

$$H < \left[ \frac{9}{4} \left( \frac{3}{8} \right)^n \frac{Re_c k}{\rho} (\sqrt{g})^{n-2} \right]^{\frac{2}{2+n}} \quad [ 6 ]$$

Ainsi, si on veut utiliser cet écoulement comme un consistomètre, on devrait d'abord choisir la valeur de la profondeur initiale H de telle sorte qu'elle puisse vérifier la condition ( 6 ).

Le traitement théorique des écoulements à surface libre des fluides complexes, analytique ou numérique, est très rare dans la littérature. Les difficultés expérimentales et celles rencontrées lors de la résolution, sont dues en particulier à l'existence d'une discontinuité dans la loi de comportement du fluide lorsque la contrainte atteint le seuil de plasticité. Quelques investigateurs (Huang & Garcia 1997-1998, Coussot & al 1996, Laigle & Coussot 1997, Coussot 1994, Martinet 1992, Liu & Mei 1989-1990, Johnson 1970 et autres) restent à la frontière de l'hydraulique classique, et ils considèrent sans vérification avoir affaire à un simple cisaillement du fluide sans aucune contrainte normale. Piau (1996) a montré que le schéma reproduit de l'hydraulique classique sans prise en compte des contraintes élongationnelles, peut être incomplet. Une formulation simplifiée des équations de mouvement a été alors proposée où l'influence des contraintes normales due au seuil apparaît explicitement. Une première validation du modèle a été réalisée par Ayadi (1996) en écoulement graduellement avec un fluide thixotrope. D'autres validations ont été suivies par la suite : dans l'écoulement graduellement varié avec un modèle d'Herschel-Bulkley et aussi dans le problème de rupture de barrage (Debiane 2000).

L'étude présentée dans ce travail vient dans la suite de l'étude théorique présentée dans le rapport précédent. L'objectif est d'examiner les approches théoriques utilisées. Pour cela

deux fluides modèles ont été utilisés: un modèle Newtonien très visqueux et un modèle d'Herschel-Bulkley. On obtient un accord remarquable.

## 2 Théorie

Dans un rapport précédent, nous avons établi plusieurs solutions asymptotiques du modèle d'écoulement de Piau (1996). Nous présenterons ici que la solution correspondante à l'écoulement du front visqueux.

### 2.1.1 Ecoulement du front visqueux

Au temps relativement grand ( $\tau > \tau_c(m)$ ), l'écoulement devient purement visqueux. Suivant les conditions aux bords, on peut évoquer deux situations : écoulement de la zone frontale visqueuse et l'étalement du front visqueux. Chaque de ces deux situations est valable dans une gamme adéquate de variation du temps.

- **Écoulement de la zone frontale visqueuse :**

En utilisant les variables adimensionnelles suivantes (désignées par le signe  $\sim$ ) :

$$\left(\tilde{h}, \tilde{x}, \tilde{t}\right) = \left(\frac{h}{H}, \frac{x}{H}, \frac{t}{T_H}\right) \quad \text{où} \quad T_H = (m+2) \left(\frac{2(m+1)}{m}\right)^m \frac{1}{Re_H^m} \sqrt{\frac{H}{g}} \quad [7]$$

on obtient les solutions affines de la forme :

$$\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = X_1 \left( \eta = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}_f(\tilde{t})} \right) \quad [8]$$

avec

$$\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{c}_f(m) (\tilde{t} - \tilde{c}_1)^{\frac{1}{m+1}} \quad \text{et} \quad \tilde{c}_f(m) \approx \frac{1}{3} + \frac{0.944}{(m+0.548)^{0.85}} \quad [9]$$

- **Etalement du front visqueux**

La solution présentée plus haut n'est valable qu'avant que la position arrière n'atteigne l'extrémité amont du réservoir, soit  $\tilde{x}_b < L/H$ . Ultérieurement, les conditions aux bords ne seront pas valables. Dans ce cas la profondeur du fluide varie remarquablement à l'extrémité amont du réservoir et on fait donc apparaître l'influence de la longueur finie du réservoir  $L$ . Il s'agit là d'un problème analogue à l'étalement d'une goutte sur fond sec sans effets capillaires. Les variables adimensionnelles les plus convenables pour cette situation d'écoulement sont (désignées par le signe  $\hat{\cdot}$ ) :

$$\left(\hat{h}, \hat{x}, \hat{t}\right) = \left(\frac{h}{H}, \frac{x}{L}, \frac{t}{T_L}\right) \quad \text{avec} \quad T_L = (m+2) \left(\frac{2(m+1)}{m}\right)^m \frac{1}{Re_L^m} \sqrt{\frac{H}{g}} \quad [10]$$

où :

$$Re_L = (H/L) Re_H \quad [11]$$

$(1/\tilde{c}_b(m))^{m+1} T_L$  représente le temps nécessaire à la position arrière pour parcourir toute la longueur initiale du réservoir.

La solution du problème s'exprime comme suit :

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t}) X_2 \left( \eta = \frac{\hat{x} + 1}{\hat{x}_f(\hat{t}) + 1} \right) \quad [12]$$

avec

$$\hat{x}_f(\hat{t}) = \hat{c}_f(m) [\hat{t} + \hat{c}_2]^{1/3m+2} - 1 \quad ; \quad \hat{h}(\hat{x} = -1, \hat{t}) = \frac{1}{a(m)(\hat{x}_f(\hat{t}) + 1)} \quad ; \quad X_2(\eta) = \left(1 - \eta^{1+m}\right)^{\frac{m}{2m+1}} \quad [13]$$

et

$$a(m) = \int_0^1 X_2(\eta) d\eta \quad ; \quad \hat{c}_f(m) = \left( \frac{(3m+2)}{a(m)^{2m+1}} \left( \frac{2(m+1)^2}{m(2m+1)} \right)^m \right)^{\frac{1}{3m+2}} \quad [14]$$

### 2.1.2 Etat d'équilibre

Dans l'hypothèse que le fluide s'arrête les contraintes pariétales se réduisent au seuil d'écoulement, le profil de la surface libre lors de l'arrêt  $\hat{h}_{stop}$  devrait obéir aux relations suivantes :

$$\hat{h}_{stop} = \phi + \sqrt{(\lambda-1)^2 \phi + 2Od(\hat{x}_{fstop} - \hat{x})} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{\hat{x}_{fstop}} \hat{h}_{stop} \partial \hat{x} = 1 \quad [15]$$

où  $\hat{x}_{fstop}$  est l'abscisse du front d'onde lors de l'arrêt et  $Od$  étant le nombre d'Oldroyd défini comme suit :

$$Od = \frac{s}{\rho g H} \left( \frac{L}{H} \right) \quad [16]$$

Suivant les conditions du problème, on peut évoquer deux situations : blocage du fluide amont et l'arrêt. Chaque de ces deux situations est valable suivant la valeur du nombre d'Oldroyd. Si  $Od > Od_c$ , on est dans la première situation, sinon on est dans la situation d'arrêt, avec :

$$Od_c = \frac{1}{3}(1 - \lambda\phi) \left[ 1 - \frac{3-2\lambda}{2} \phi(\lambda\phi + 1) \right] \quad [17]$$

- **Blocage du fluide amont**

On suppose ici que l'état d'équilibre est atteint avec une partie du fluide, située en amont, qui reste en repos à la profondeur initiale  $H$ . Il est possible alors de définir dans ce cas une position arrière  $\hat{x} = \hat{x}_{bstop}$ , telle que pour  $\hat{x} \leq \hat{x}_{bstop}$ ,  $\hat{h}_{stop}(\hat{x}) \approx 1$  et entre  $\hat{x} = \hat{x}_{bstop}$  et  $\hat{x} = \hat{x}_{fstop}$ , la profondeur du fluide varie comme l'équation (15). On a dans ce cas :

$$\hat{x}_{bstop}(Od, \phi) = -\frac{1}{3Od}(1 - \lambda\phi) \left[ 1 - \frac{3-2\lambda}{2} \phi(\lambda\phi + 1) \right]$$

et

$$\hat{x}_{fstop}(Od, \phi) = \frac{1}{6Od}(1 - \lambda\phi) [1 - \lambda\phi(2 + 2\lambda\phi - 3\phi)]$$

- **Arrêt**

On considère qu'on est dans ce cas lorsque toute la quantité initiale du fluide est bougée par l'écoulement qui précède l'arrêt. Dans ce cas la profondeur du fluide lors de l'arrêt varie

dans tout le domaine du fluide entre  $\hat{x} = -1$  et  $\hat{x} = \hat{x}_{fstop}$  comme l'équation ( 15 ). En définissant  $\hat{h}_{0stop}$  comme étant la profondeur du fluide à  $\hat{x} = -1$  lors de l'arrêt, on montre que:

$$\frac{1}{3}\hat{h}_{0stop}^3 - \frac{\phi}{2}\hat{h}_{0stop}^2 + \frac{\phi}{2}\phi_0^2 - \frac{1}{3}\phi_0^3 - Od\hat{V}_0 = 0$$

L'abscisse du front lors de l'arrêt peut être déterminé en utilisant la relation suivante :

$$\hat{x}_{fstop}(Od, \phi) = \frac{1}{2Od} \left[ (\hat{h}_{0stop} - \phi)^2 - (\lambda - 1)^2 \phi \right] - 1$$

### 2.2.2.5 Application aux consistomètres.

Compte tenu de nos relations théoriques, il est possible de déduire quelques formules simples qui permettent d'évaluer la consistance des fluides visqueux ou viscoplastiques dans un canal rectiligne.

- Si le seuil de contrainte est nul, on caractérise la consistance du fluide à partir de l'indice de rhéofluidification  $n$  et de la consistance  $k$ , qui peuvent être évaluées expérimentalement en mesurant aux temps grands l'évolution du front d'onde en fonction du temps. En effet, compte tenu des relations ( 13 ) on doit avoir dans ce cas :

$$x_f(t) + L = q t^p \quad [ 18 ]$$

Les mesures dans le canal donnent les valeurs expérimentales de  $x_f(t)$  qui peuvent être ajustées avec la loi ( 18 ). On en déduit les valeurs de  $q$  et  $p$ . On calcul ensuite les valeurs de  $m$  et  $k$  à partir des relations suivantes :

$$m = \frac{1-2p}{3p} \quad \text{et} \quad k = \left( \frac{m}{2m+2} \right) \left( \frac{1}{m+2} \right)^{1/m} \left( \frac{\hat{c}_f(m)}{q} \right)^{\frac{3m+2}{m}} V_0^{\frac{2m+1}{m}} \rho g \quad [ 19 ]$$

$V_0$  est le volume initiale du fluide par unité de largeur du canal

Cependant ces relations ne sont exactes que pour les fluides en loi de puissance. Si le fluide obéit à une loi différente, mais de propriétés intemporelles, il est souvent possible de définir dans une plage adéquate de variation de  $t$ , un indice apparent  $n_c$  et une consistance apparentes  $k_c$ . Ces paramètres peuvent être ensuite utilisés pour une meilleure comparaison entre les matériaux très visqueux.

- Pour un fluide à seuil de contrainte, on caractérise la consistance à partir de la valeur du seuil, qui peut être mesurée dans le canal connaissant les valeurs expérimentales de  $h_{0stop}$  et  $x_{fstop}$  (la profondeur du fluide au bord amont du canal et l'abscisse du front lors de l'arrêt, respectivement). On en déduit compte tenu de l'équation ( 15 ) (valable lorsque  $L < L_c$  et  $\lambda = 1$ ) la valeur de  $s$ , soit :

$$s = \frac{(\phi h_{0stop} + x_{fstop} + L) \rho g}{\phi^2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{\phi h_{0stop}}{\phi h_{0stop} + x_{fstop} + L} \right)^2} \right] \quad [ 20 ]$$

Si on obtient un grand allongement du fluide au repos on peut encore simplifier la relation ( 20 ) par la formule approchée suivante :

$$s \approx \frac{\rho g h_{0stop}}{2} \left( \frac{h_{0stop}}{\phi h_{0stop} + x_{fstop} + L} \right) \quad [ 21 ]$$

Ainsi, la base théorique a été établie. On passe maintenant à la présentation de notre étude expérimentale.

## Expérimentation

La plate-forme (figure 2) utilisée est constituée essentiellement d'un canal (9) rectangulaire en Plexiglas de longueur 5 m, hauteur 100 mm et de largeur 300 mm. Afin d'assurer la solidité du canal, celui-ci est posé sur une surface plane de Duralumin d'épaisseur 20 mm. La largeur de cette surface est supérieure à celle du canal, créant ainsi des rebords qui sont ensuite utilisés comme rails pour le chariot porte instrument (5). Pour éviter les flexions du canal, l'ensemble est fixé sur un bâti porte canal (11). Ce dernier est constitué de deux profilés en I (IPN). Un pied support de camera permet de porter et de soulever l'ensemble (canal, surface plane, bâti porte canal, le chariot), de régler l'horizontalité et d'incliner le canal. Ce pied est constitué d'un support concave (12) dont la base inférieure posée sur le sol est circulaire. Cette base est munie de vis permettant d'ajuster l'horizontalité du canal. Sur la partie supérieure du pied est fixé un plateau relié à un système vis écrou afin de régler l'inclinaison. Le chariot porte instrument (5) utilise des roues en Duralumin pour se déplacer sur les rebords. La hauteur totale du chariot est de 1m ce qui permet plusieurs positionnement des caméras afin de choisir suivant le cas le meilleur champ de vision. Sa surface, étant assez importante, permet d'accrocher plusieurs instruments tels que : la lampe d'éclairage, le capteur ultrasonique, la fibre optique, les caméras...

La procédure expérimentale utilisée est la suivante : Le fluide est placé en repos entre deux plaques verticales, une fixe et l'autre mobile (barrage). A l'amont du barrage le fond est sec. A  $t = 0$ , la plaque mobile (10) est enlevée manuellement. Le fluide déferle alors dans le canal. Les positions du front d'onde ont été mesurées grâce à des caméras (4); de cadence 1000 images/s dans les quelques secondes après la rupture, et le reste avec une caméra de 25 images/s. Une fois bien fixées sur le chariot, on démarre l'enregistrement des cassettes, puis on soulève rapidement la plaque "barrage" pour laisser le fluide s'écouler. On fait ensuite glisser le chariot à la vitesse du front d'onde tout en suivant l'écoulement à l'aide des moniteurs. D'autre part, la profondeur du fluide est mesurée grâce au système ultrasonique. Le capteur de déplacement ultrasonique (LRS3 (11)) sert à la mesure précise du déplacement dans l'air grâce aux ultrasons en comptant le temps mis par l'impulsion sonore pour parcourir le trajet de la cellule à l'objet et son retour. Le diamètre de la surface active de notre cellule (LRZ-40P) est de 40 mm. L'étendue de mesure du LRS3 a une limite inférieure qui est de 80 mm et une limite supérieure de 800 mm. L'appareil effectue ses mesures avec une précision de  $\pm 0,1mm$ .

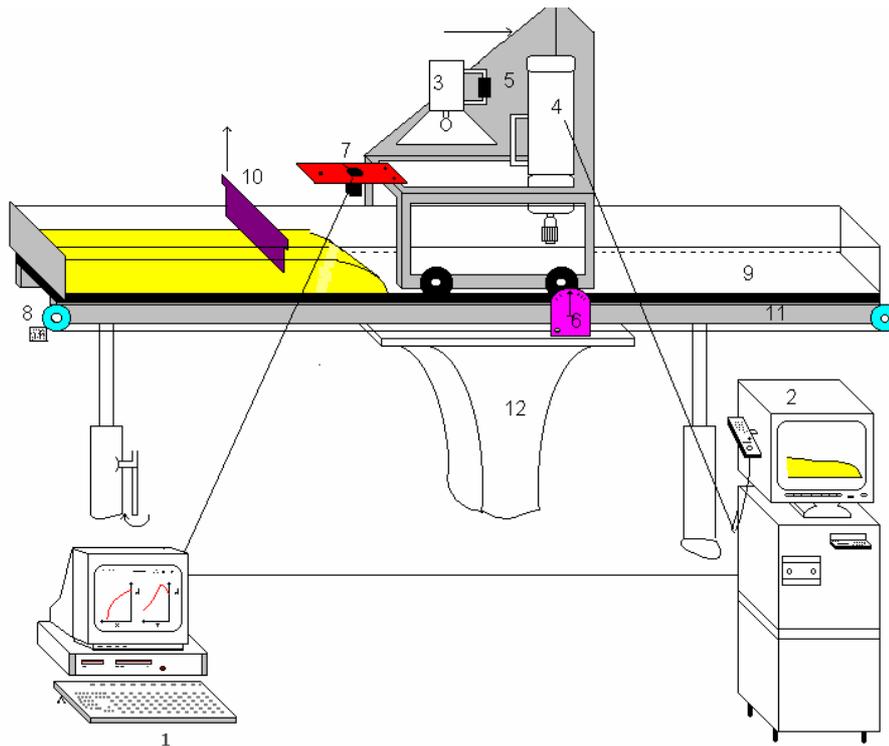


Fig. 2: Dispositif expérimental

(1) Station d'acquisition, (2) Moniteur, (3) Système d'éclairage (1000W), (4) Caméra rapide (1000 images/s), (5) Chariot porte instruments, (6) Système de mesure d'angle, (7) Le capteur de déplacement ultrasonique, (8) Potentiomètre rotatif, (9) Canal, (10) Barrage, (11) Bâti porte canal, (12) Support.

La position du capteur ultrasonique (fixé sur le chariot) est localisée par un mécanisme constitué par un potentiomètre relié à deux poulies (8). Ces dernières sont fixées aux extrémités du canal longeant le même coté. Un fil métallique de 2 mm de diamètre est attaché au chariot et passe en rotation par les deux poulies. Le mouvement de déplacement du chariot se transforme en mouvement de rotation des poulies, d'où une variation de la tension de sortie du potentiomètre. Ce système calcule les abscisses avec une erreur estimée à 1mm (erreur due essentiellement au calibrage). Le capteur ultrasonique et le potentiomètre sont reliés à l'ordinateur (1) pour obtenir la combinaison entre la profondeur du fluide, la position du capteur ultrasonique et le temps. Les profils de la surface libre sont mesurés en déplaçant le chariot d'une extrémité à l'autre de l'écoulement. Au cours de l'expérience, deux courbes sont constamment affichées sur l'écran de l'ordinateur, l'une représente l'évolution de la hauteur en fonction du temps et l'autre la variation des hauteurs en fonction des abscisses. Ces courbes servent au bon suivi de l'écoulement.

Dans ce travail, nous avons choisi de présenter quelques résultats obtenus dans un canal horizontal, et qui portent sur l'évolution du front d'onde en fonction du temps, la variation du profil de la surface libre ainsi que l'abscisse du front et le profil de l'écoulement lors de l'arrêt. Deux modèles ont été testés ; un modèle Newtonien de viscosité élevée (solution de Glucose) et un modèle d'Herschel-Bulkley (gel de Carbopol).

### 3 Etude expérimentale

#### 3.1 Modèle Newtonien

Le modèle Newtonien utilisé dans nos expériences est donc une solution d'eau et de glucose de viscosité élevée. Le glucose est disponible au Laboratoire dans des caissons hermétiques de 80 Kg. On fixe la concentration massique en glucose ainsi que la masse du glucose (environ 25 Kg) nécessaire à nos expériences. On détermine alors la masse d'eau qu'il faut, puis on verse cette quantité dans le glucose. Souvent, avant de mélanger les deux produits, on chauffe le glucose dans une étuve à 75°C pendant une quinzaine de minutes, car l'eau n'est pas très soluble dans le glucose à température ambiante. Ensuite, la solution est malaxée doucement pour que le glucose se dissolve bien dans l'eau, sans emprisonner de bulles d'air dans le fluide. Notons que la viscosité du fluide est très sensible à la variation de la température et aussi à la variation de la concentration. Il faut alors beaucoup de précautions lors d'essais dans le canal (prendre la température du fluide et effectuer les mesures rhéométriques avec cette température, contrôler régulièrement la masse volumique du fluide...). Les différentes configurations d'écoulement choisies pour cette étude sont présentées dans le Tableau 1. Le rapport  $b/2H$  est relativement grand pour pouvoir négliger les effets de bords.

Tableau 1: Différentes configurations de l'écoulement avec le modèle Newtonien

Désignation	Viscosité $\mu(Pa.s)$	H(mm)	L(mm)	H/L	$\rho(kg/m^3)$	$b/2H$	Re
Glus.1	12	55	440	0.125	1406	2.78	2.92E-02
Glus.2		55	220	0.25	1406		1.17E-01
Glus.3		55	110	0.5	1406		4.67E-01
Glus.4	85	54	440	0.123	1413		5.36E-04

La figure 3 montrent en variables adimensionnelles (équation ( 10 )) avec dans ce cas  $m = 1$ ) l'évolution en fonction du temps de la position du front. Au-delà d'un certain temps, toutes les mesures se superposent sur une loi unique indiquant ainsi le bon choix des variables adimensionnelles et du modèle d'écoulement. On observe pas un arrêt dans ce cas car le seuil de contrainte est nul (modèle Newtonien) et les effets capillaires peuvent être négligeables, car les profondeurs de l'écoulement sont relativement grandes. Les courbes en ligne continues représentent la théorique comportant la solution de l'écoulement du front inertiel et visqueux, et la solution de l'écoulement du front visqueux (écoulement de la zone visqueuse et l'étalement du front visqueux). Les transitions ont été évaluées en assurant la continuité de la position du front le long de l'écoulement. L'accord est donc remarquable. Cependant, quelques différences apparaissent. Le grand écart peut être observé aux faibles abscisses où le calcul donne des valeurs plus grandes que les mesures. L'écart est dû à l'influence de la levée du barrage (non instantanéité de la rupture) et éventuellement à la non distribution hydrostatique de la pression. Il semble cependant que ces causes d'erreurs disparaissent

lorsque le front d'onde de rupture de barrage parcourt une distance supérieure à  $1.1 H$ . Après, la déviation moyenne devient meilleure que 5.5%, et l'écart maximal est de 10% obtenu aux voisinages de  $\hat{t} = 1$ .

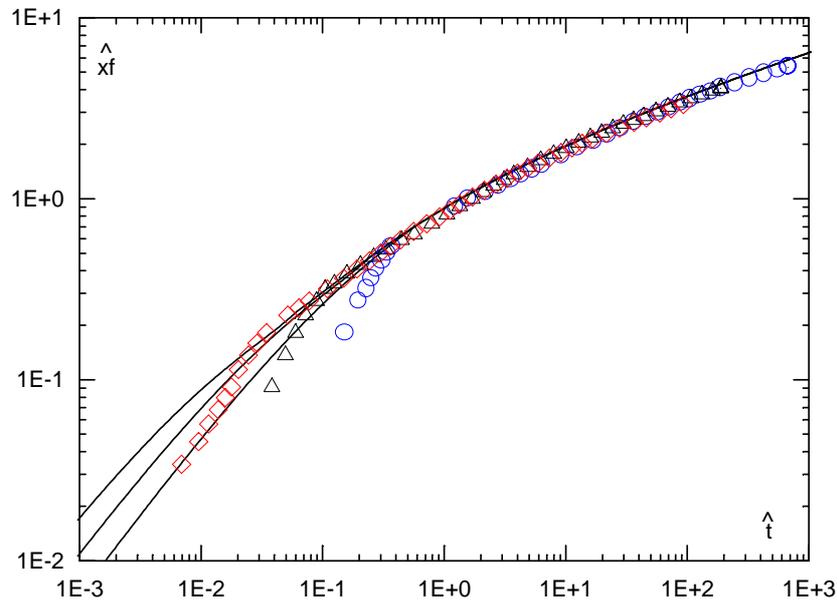


Fig. 3: Comparaison théorie-expérience de l'évolution du front d'onde en fonction du temps ; modèle Newtonien, variables adimensionnelles,  $\diamond$  Glus.1,  $\Delta$  Glus.2,  $\circ$  Glus.3, — théorie

On représente sur la figure 4 quelques mesures du profil de la surface libre et qui sont comparés dans la même figure aux calculs théoriques (théorie de l'étalement du front visqueuse). On peut noter le changement global du profil de l'écoulement par rapport au profil parabolique de Ritter, on obtient cependant un accord satisfaisant avec la théorie visqueuse. Dans la région supérieure, l'accord est meilleur que 2% et dans la région frontale, l'écart est inférieur à 10%. La déviation moyenne est d'environ 0.7%, région frontale incluse. L'écart relativement important dans la région frontale est dû spécialement aux effets de l'écoulement bidimensionnel et aussi à l'influence de la tension superficielle à cause de la faible valeur dans cette région du rayon de l'interface air-liquide.

Notons enfin que les paramètres rhéologiques utilisés dans le calcul sont ceux des mesures rhéométriques, et que l'ensemble des résultats obtenus dans le canal, donne compte tenu des relations ( 19 ))  $n = 1 \pm 1\%$ , et une viscosité avec un écart maximal de 9% par rapport aux mesures rhéométriques.

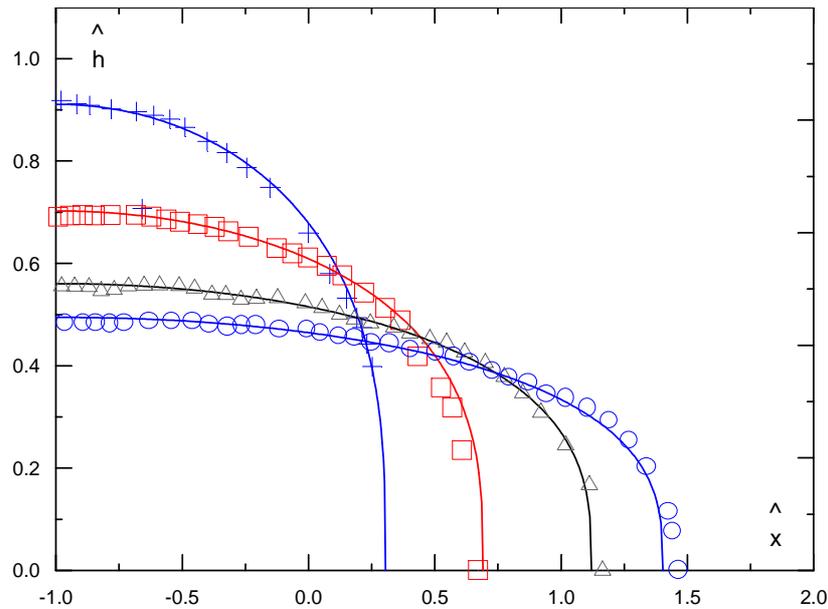


Fig. 4: Comparaison théorie-expérience du profil de l'écoulement, modèle Newtonien ; variables adimensionnelles; Glus.4, +  $\hat{t} = 0.1$ ,  $\hat{t} = 0.55$ ,  $\Delta \hat{t} = 1.85$ ,  $\circ \hat{t} = 3.51$ , — théorie

### 3.2 Modèle d'Herschel Bulkley

Le gel de carbopol est obtenu à partir de la résine Carbopol 940 de B.F. Goodrich Company. En solution et après neutralisation à l'aide d'une base minérale (Soude), une ionisation de la résine conduit à un épaissement instantané. La consistance du produit dépend fortement de la concentration et de pH.

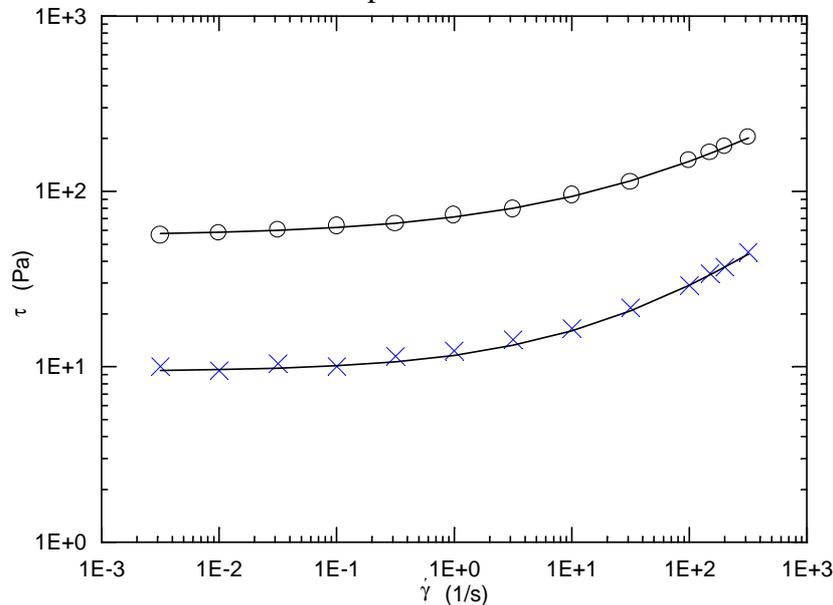


Fig. 5: Courbes d'écoulement obtenues à l'aide du Weissenberg; Gel de Carbopol :  $\circ C_m = 0.41\%$ ,  $\times C_m = 0.11\%$  où  $C_m$  est la concentration massique en Carbopol.

La caractérisation du gel de Carbopol, à l'aide de deux rhéomètres (Carri-Med CSL100 et Weissenberg), selon les méthodes mises au point par Magnin & Piau (1987-1990), indique la loi de comportement du fluide qui suit le modèle d'Herschel-Bulkley (figure 5). Les trois paramètres rhéologiques ( $s$ ,  $k$ ,  $n$ ) sont obtenus par ajustement des mesures rhéométriques avec

la courbe théorique. La précision sur les mesures rhéométriques est d'environ 20%. Le Tableau 2 montre les différentes configurations d'écoulement choisi pour l'étude expérimentale.

Tableau 2 : Différentes configurations de l'écoulement

Désignation	$C_m$ %	H mm	L mm	En rhéométrie			Dans le canal	Re	Od	$\phi$
				n	k Pa.s <sup>n</sup>	s Pa	s Pa			
CARB.1	0.11	55	110	0.45	2.6	9.5	11	32.3	0.041	0.031
			220					16.2	0.082	
			440					8.1	0.163	
CARB.2		100	100	0.39	15.6	56	60	5.14	0.061	0.092
			500					-	-	
CARB.3	0.41	51.5	100	0.39	15.6	56	60	1	0.231	0.178
			600					-	-	

La figure 6 représente en variables adimensionnelles (équation ( 10 )) les mesures de l'évolution en fonction du temps de la position du front d'onde. D'autre part, l'ensemble des courbes a été comparé à la théorie (comportant la solution de l'écoulement du front inertiel et visqueux, la solution de l'écoulement du front visqueux et la théorie d'arrêt).

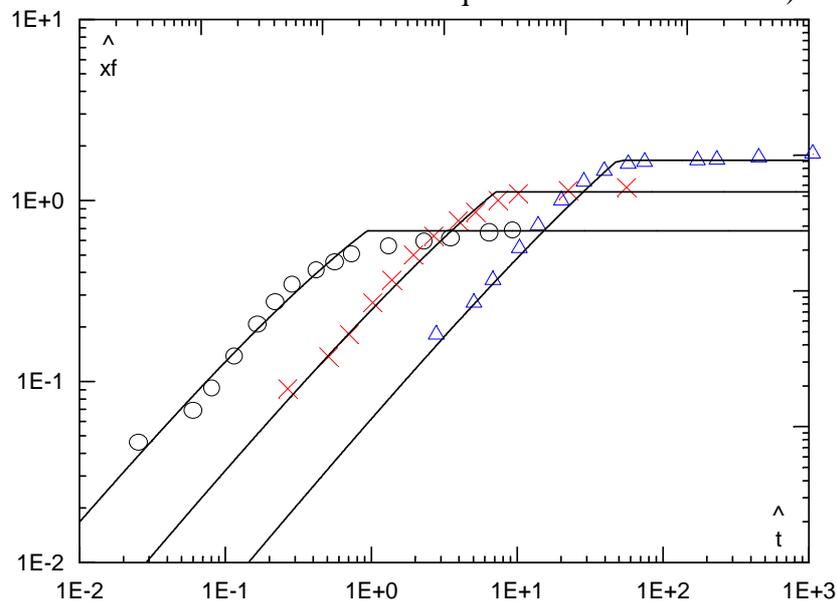


Fig. 6: Evolution de la position du front d'onde en fonction du temps, modèle d'Herschel-Bulkley; variables adimensionnelles; CARB.1,  $\Delta$  L= 110 mm,  $\times$  L = 220 mm, O L =440 mm, — Théorie

L'accord est satisfaisant. On peut cependant observer un écart dû à l'influence du seuil de contrainte avant l'arrêt d'écoulement. Mais dans tous les cas, l'écart maximal obtenu est d'environ 10%.

Un résultat également intéressant de cette étude, concerne l'arrêt d'écoulement. Cette propriété des fluides à seuil de contrainte se manifeste lorsque la plasticité du fluide domine les autres termes résistants (frottements visqueux et l'inertie). Au seuil d'équilibre statique, l'arrêt ne dépend que du nombre d'Oldroyd et  $\phi$ . La figure 7 présente la variation de l'abscisse du front lors de l'arrêt en fonction du nombre d'Oldroyd (ici  $Od$  est grand). Les mesures sont comparées à la théorie de blocage. On vérifie que le meilleur accord est obtenu en tenant compte des contraintes élongationnelles, i.e de  $\phi$ .

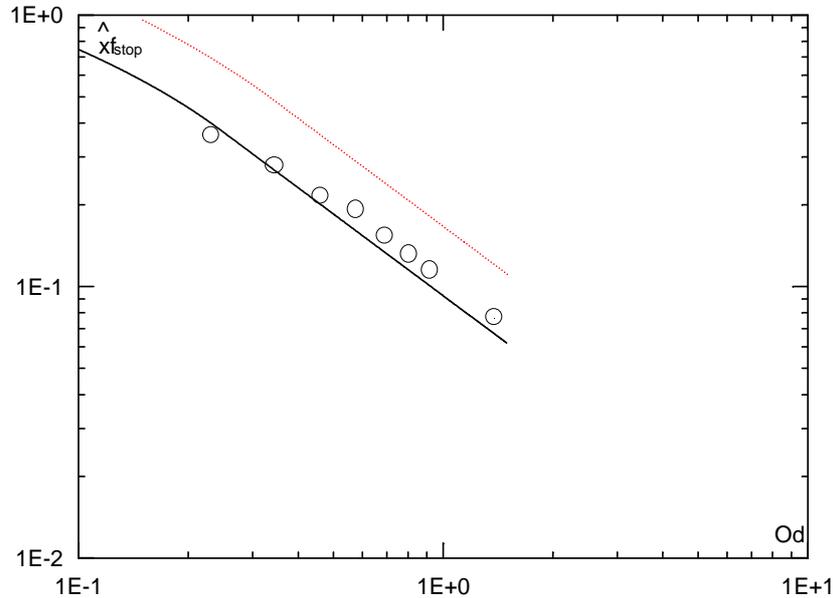


Fig. 7: Position du front d'onde lors de l'arrêt en fonction de  $Od$ , modèle d'Herschel-Bulkley, variables adimensionnelles CARB.3,   
 o Expérience ——— Théorie ( $\phi = 0.178$ ), - - - Théorie ( $\phi = 0$ )

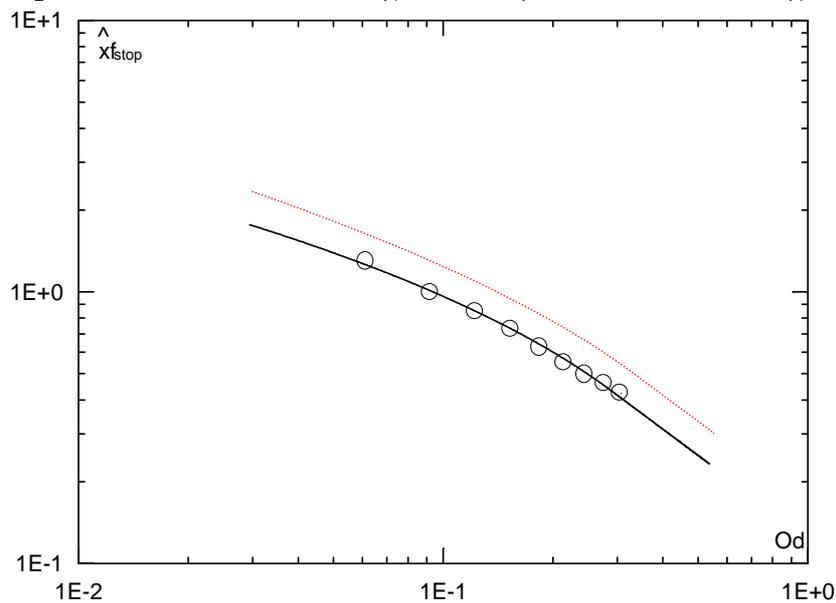


Fig. 8: Position du front d'onde lors de l'arrêt en fonction de  $Od$ , modèle d'Herschel-Bulkley, variables adimensionnelles, CARB.2,   
 o Expérience, ——— Théorie ( $\phi = 0.092$ ), - - - Théorie ( $\phi = 0$ )

La figure 8 qui montre également l'évolution de la position du front lors de l'arrêt en fonction du nombre d'Oldroyd ( $Od$  petit dans ce cas) a été comparée à la théorie d'arrêt. On obtient aussi un accord très remarquable, mais en tenant compte des contraintes élongationnelles.

Donc, on montre ici l'influence non négligeable des contraintes élongationnelles lors de l'arrêt de l'écoulement sur l'état d'équilibre.

Sur les figures 13 et 14 on représente le profil de la surface libre lors de l'arrêt en fonction du nombre d'Oldroyd. Pour  $Od$  grand (figure 9), on remarque l'existence effectivement d'un point particulier qui sépare deux régions : une région où la hauteur est sensiblement constante égale à la hauteur initiale du réservoir, et une région où la hauteur décroît. La distance de ce point (compté à partir du barrage) diminue avec l'augmentation du nombre d'Oldroyd. Il faut cependant signaler que la théorie sous estime la position de ce point particulier à cause de l'influence de l'histoire de l'écoulement.

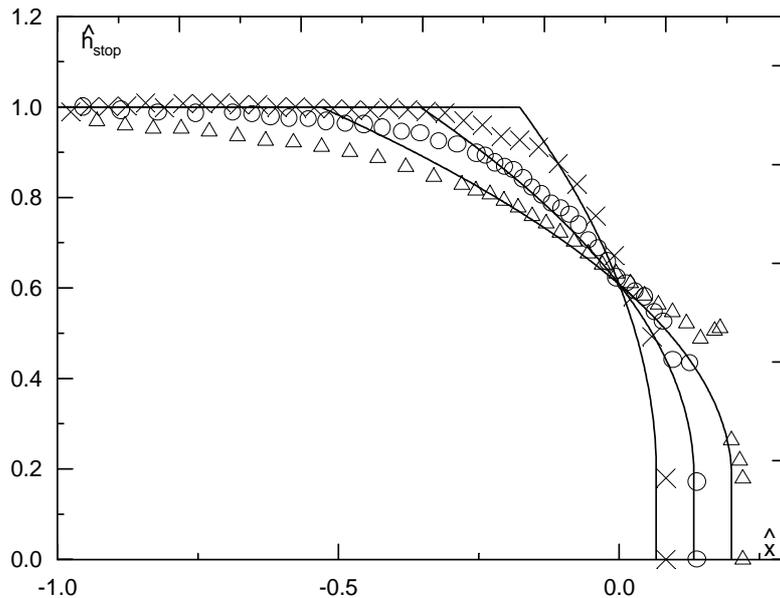


Fig. 9: Profil d'équilibre en fonction de  $Od$  ; modèle d'Herschel-Bulkley, CARB.3,  $\Delta L = 200$  mm ( $Od=0.461$ ),  $O L = 300$  mm ( $Od=0.692$ ),  $\times L = 600$  mm ( $Od=1.384$ ), — Théorie ( $\phi = 0.178$ )

Pour  $Od$  petit (figure 10), on remarque que tout le contour du réservoir s'écoule et que la hauteur à l'extrémité amont du réservoir diminue avec le nombre d'Oldroyd. L'ensemble de ces profils a été comparé à la prédiction de la théorie d'arrêt et on tire un accord satisfaisant, l'accord étant d'autant meilleur lorsqu'on diminue la valeur du nombre d'Oldroyd.

Les valeurs du seuil de contrainte utilisées dans le calcul sont obtenues par ajustement de la courbe théorique avec les mesures dans le canal. Compte tenu de cette équation, lorsqu'on trace la quantité  $\phi \hat{h}_{stop} - (\hat{h}_{stop}^2 / 2)$  en fonction de  $\hat{x}$ , on obtient une droite. Théoriquement la pente de la droite doit être égale à  $Od$ . Il est possible alors de déduire la valeur du seuil de contrainte compte tenu de la définition du nombre  $Od$  (16). Le calcul est effectué sur l'ensemble des résultats obtenus, et on prend à la fin une valeur moyenne. En tenant compte des contraintes élongationnelles, i.e du nombre  $\phi$ , on obtient un écart de 7.5 % par rapport à la valeur déduite des mesures rhéométriques. Si par contre, on prend  $\phi = 0$ , on obtient un écart de 30%. L'évaluation du seuil de contrainte à partir de l'équation (20) donne un écart par rapport aux mesures rhéométriques de 10%, et 15% en utilisant la relation approchée (21).

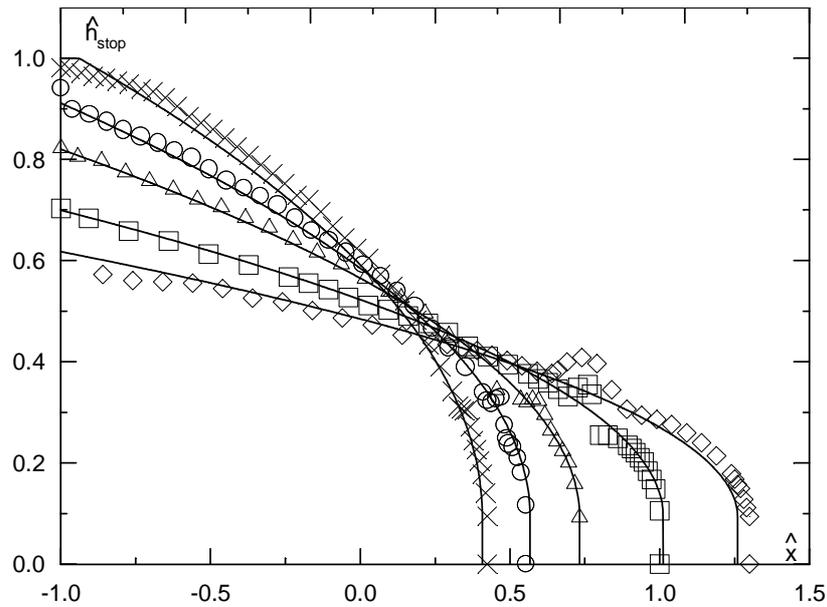


Fig. 10: Profil d'équilibre en fonction de  $Od$  ; modèle d'Herschel-Bulkley, CARB.2,  $\diamond$   $L=100$  mm ( $Od=0.061$ ),  $\square$   $L=150$  mm ( $Od=0.092$ ),  $\triangle$   $L=250$  mm ( $Od=0.153$ ),  $\circ$   $L=350$  mm ( $Od=0.214$ ),  $\times$   $L=500$  mm ( $Od=0.306$ ), — Théorie ( $\phi = 0.092$ )

D'autre part, la valeur du coefficient de forme  $\phi$  est pris comme dans l'écoulement graduellement varié (Debiane 2000) égal à 1.5, et la valeur de  $\phi_0$  a été évaluée expérimentalement, en supposant qu'elle correspond à la profondeur du fluide possible à mesurer, et se situant le plus proche possible à la position du front d'onde. Dans ces conditions, on trouve  $\phi_0 \approx \phi$ , mais compte tenu des erreurs qui apparaissent au voisinage du front, il convient de prendre cette valeur avec soin. En effet, la manière dont on réalise la rupture a une influence sur l'état d'équilibre notamment au voisinage du barrage. Lors de la levée non instantanée de la plaque, une quantité du fluide est entraînée vers le haut, en même temps, le fluide coule au-dessous. A la fin, on obtient une pile de fluide presque triangulaire qui se propage avec l'écoulement. La pile peut complètement disparaître si la hauteur est faible ou le fluide est moins consistant, mais elle peut rester pour toujours (où elle atteint un état d'équilibre quasi-statique) si le gel est très consistant (figure 9 ou figure 10). La pile du fluide peut donc influencer l'arrêt sur une distance relativement petite de part et d'autre de la pile et peut aussi, parfois, provoquer des erreurs dans la conservation de la quantité initiale du fluide.

## 4 Conclusion

Nous avons réalisé dans ce travail sur la rupture de barrage viscoplastique une étude expérimentale dans un canal prismatique horizontal de section rectangulaire. Les résultats obtenus sont comparables aux prédictions théoriques établies dans un rapport précédent. Cet écoulement peut donc constituer un nouveau rhéomètre très économique facilement utilisable pour avoir des valeurs sur la consistance des matériaux à seuil d'écoulement.

## Bibliographie

- Ayadi A., (1996) Ecoulement à surface libre des boues argileuses, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I
- Bird, R. B., Gange, D., Yarusso, B. J. 1983 The rheology and flow of viscoplastic materials. *Rev. Chem. Eng.* 1, 1-70.
- Coussot, P. (1994) Steady, Laminar, flow of concentrated mud suspension in open channel. *Journal of Hydraulic Research*, 32, N°4 ; 535-559
- Coussot, P., Proust, S., Ancey, C. (1996) Rheological interpretation of deposits of yield stress fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 66, 55-70.
- Darby, R. (1986) Laminar and turbulent pipe flows of non-Newtonien fluids, In *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, Vol. 7 (ed. N. P. Cheremisinoff), pp. 19-53. Gulf.
- Debiane, K. (2000) Hydraulique des écoulements laminaires à surface libre dans un canal pour des milieux visqueux ou viscoplastiques. Régimes uniforme, graduellement varié, et rupture de barrage. Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- De Saint-Venant, B. (1871) Théorie du mouvement non permanent des eaux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 73, 237.
- Dressler, R.F. (1952) Hydraulic resistance effects upon the dam break functions . *Journal of Research of the National Bureau of Standards.* **49**(3):217.
- Dressler, R.F. (1954) Comparison of theories and experiments for hydraulic dam-break wave, *Int. Assoc. Sci. Pubs*, **3**(28), 319-328.
- Huang, X., Garcia, M.H., (1997) A perturbation solution for Bingham-plastic mud flows, *J. Hydraul. Engng ASCE* 123, 986-994.
- Huang, X., Garcia, M.H., (1998) A Herschel-Bulkley model for mud flows down a slope., *J. Fluid Mech.* 374, 305-333.
- Johnson, A. M. (1970) *Physical processes in geology*, Freeman, Cooper, San Francisco, 577 pp.
- Kessel T.V & Kranenburg C. (1996) Gravity current of fluid mud on sloping Bed. *J. Hydr Engrg.*, 122(12), 710-717
- Liu K.F., and Mei C.C, (1989) Slow spreading of sheet of Bingham fluid on an inclined plane, *J. Fluid Mechanics*, 207, 505-529
- Liu K.F., and Mei C.C, (1990) Approximate relations for the slow spreading of a thin sheet of Bingham plastic fluid, *Phys. Fluid A* 2 (1), 30-36.
- Magnin A., et Piau J.M., (1987) Shear rheometry of fluids of yield stress, *Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **23**, 91-106
- Magnin A., et Piau J.M., (1990) Cone and plate rheology of yield stress, Study of an aqueous gel" *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **36**, 85-108
- Piau, J.M. (1996) Flow of a yield stress fluid in a long domain. Application to flow on an inclined plane, *Journal of Rheology*, **40**(4):711.
- Qian, N, & Wan, Z. (1986) A critical review of the research on the hyperconcentrated flow in china. *Intl Res. And Training Ctr. On Erosion and Sedimentation*, Beijing.

Ritter, A. (1892) Die Fortpflanzung der Wasser Wellen, Z. des Ver. Deutsch Ing; **36**(33):947

Schoklitsch A. (1917) Über Damnbruchwellen, Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, **126**; 1489-1514

Utracki, L. A. 1988. The rheology of two phase flows. In rheological measurement, ed. A. A. Collyer, D. W. Clegg, 479-594. London: Elsevier.

