

Influence de la rhéofluidification dans le problème de couche limite viscoplastique

Objectif du travail

Piau (2001) a établi la base théorique du problème de couche limite viscoplastique lorsque le niveau des contraintes est proche du plateau plastique (écoulement à très faibles vitesses). L'auteur considère le modèle d'écoulement de Bingham et montre ainsi l'influence d'un nombre adimensionnel primordial, qui est le nombre d'Oldroyd : rapport des forces plastiques et forces visqueuses. Mais comme les fluides viscoplastiques réels sont souvent rhéofluidifiants, il est aussi intéressant d'examiner, dans le problème considéré, les effets de ce comportement rhéologique.

Dans ce but, nous présenterons dans ce travail le comportement du fluide en écoulement par le modèle d'Herschel-Bulkley avec un paramètre en plus par rapport au modèle de Bingham qui est l'indice de rhéofluidification n . Avec ce modèle et la base théorique de Piau, nous traitons le problème et nous dégagerons à la fois l'influence du nombre d'Oldroyd et de l'indice n .

Dans ce rapport, nous présenterons que l'étude théorique. La comparaison avec l'expérience fera l'objet du rapport qui suivra.

2 Etude théorique

2.1 Modèle de fluide adopté

Nous considérons les équations rhéologiques données par le modèle d'Herschel-Bulkley, complété par le modèle d'élasticité linéaire de Hooke. Ainsi, en supposons que le mouvement est isothermique et que le fluide est isochore, le comportement mécanique peut être représenté, comme suit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p \mathbf{1} + \mathbf{T} \quad (1)$$

Avec

$$T = \begin{cases} 2 \eta(\sqrt{-4D_{II}}) \mathbf{D} & \text{si } -T_{II} > s^2 \\ \mu \boldsymbol{\varepsilon} & \text{si } -T_{II} \leq s^2 \end{cases}$$

où

$$\eta(\sqrt{-4D_{II}}) = \frac{s}{\sqrt{-4D_{II}}} + K (\sqrt{-4D_{II}})^{n-1} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{1+\nu} \quad (2)$$

Comme le fluide est supposé isochore ($\nu = 1/2$), on a de plus : $\text{tr}(\mathbf{D}) = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$

Le critère de plasticité utilisé dans le modèle est celui de Von Mises. $\boldsymbol{\Sigma}$ est le champ du tenseur des contraintes de Cauchy et \mathbf{T} étant le déviateur du tenseur de contrainte. \mathbf{D} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\mathbf{1}$ sont respectivement le tenseur des taux de déformation, le tenseur de déformation linéaire et la matrice unitaire. Les deux scalaires $T_{II} = -(1/2) \text{tr}(\mathbf{T}^2)$ et $D_{II} = -(1/2) \text{tr}(\mathbf{D}^2)$ sont les deuxièmes invariants de \mathbf{T} et \mathbf{D} , respectivement et la fonction scalaire $\eta(\sqrt{-4D_{II}})$ étant la viscosité absolue. Cette dernière est définie avec trois paramètres rhéologiques : le seuil de contrainte s , la consistance du fluide K et l'indice de rhéofluidification n . Enfin, les trois scalaires E , ν et p sont respectivement le module d'élasticité de Young, le coefficient de Poisson et la pression.

2.2 Position du problème et équations simplifiées du mouvement

Nous nous proposons d'étudier le mouvement d'un fluide viscoplastique incompressible dans un domaine indéfini, et dans lequel une plaque infiniment fine est maintenue fixe et le fluide s'écoulant autour d'elle d'un mouvement permanent, le mouvement du fluide à l'infini est un courant uniforme de vitesse U_0 parallèle à l'axe Ox (figure 1). On obtient un problème équivalent si on considère que la plaque effectue une translation rectiligne et uniforme de vitesse U_0 dans un fluide viscoplastique au repos à l'infini ; c'est sous la première forme que nous présenterons notre étude. Nous supposons que le fluide ne glisse pas au contact avec les parois, mais au contraire il adhère.

Le système d'axe utilisé est représenté sur la figure (1). L'origine O est prise le bord d'attaque de l'objet. Nous supposons que la largeur de la plaque b est assez importante pour pouvoir simplifier le problème et l'étudier en formulation 2D des équations du mouvement. Nous supposons également qu'aucune force extérieure n'agit sur le fluide et que ce dernier obéit au modèle rhéologique présenté précédemment. D'autre part, la symétrie de la géométrie par rapport au plan xz entraîne aussi la symétrie de l'écoulement par rapport à ce plan. Ainsi, nous pouvons nous limiter à étudier le problème dans un demi-plan et de déduire l'autre en respectant la symétrie.

Compte tenu de la formulation mathématique de la loi de comportement du fluide, nous pouvons considérer l'existence dans la partie centrale de la plaque de deux régions (région interne et région externe) séparées par une surface seuil. Cette dernière obéit au critère de plasticité de Von Mises, c'est-à-dire le long de la surface seuil on a $\sqrt{-T_{II}} = s$.

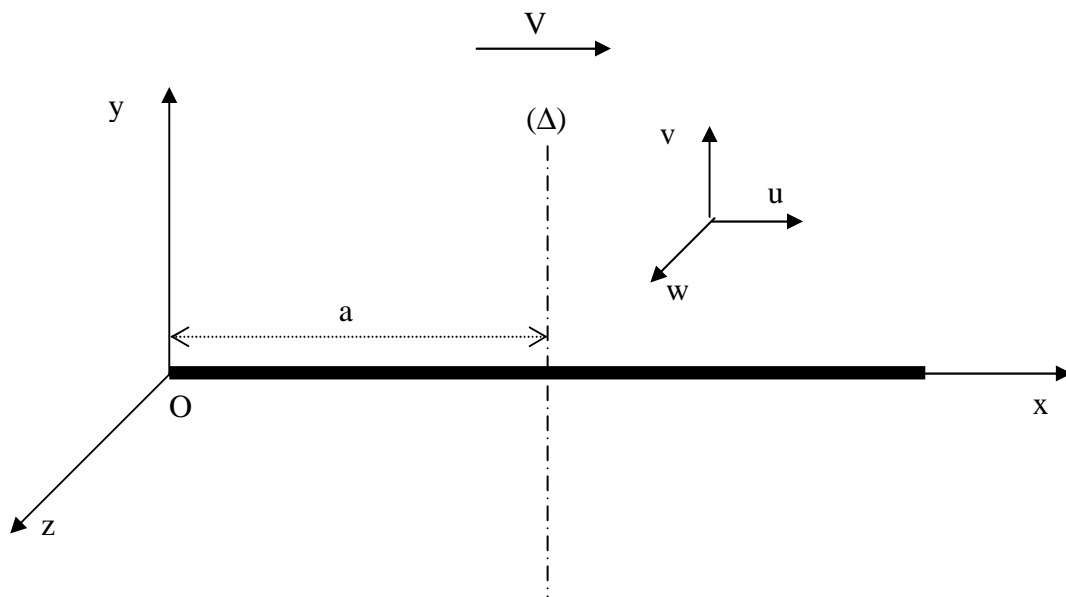


Figure 1 : Définitions et système d'axe utilisé

- La région interne est située au voisinage immédiat de la paroi. Ici, les contraintes à l'intérieur de l'écoulement dépasse la valeur du seuil ($-T_{II} > s^2$ selon le critère adopté) et par conséquent le fluide coule et les gradients de vitesse ne sont pas nuls.
- La région externe est située loin de la paroi où le matériau est en déformation élastique. Les composantes du tenseur \mathbf{T} existent dans cette région, mais elles respectent le critère

$-T_{II} \leq s^2$. Le tenseur sphérique de Σ (qui représente la pression) existe aussi, à la fois dans cette région et dans la région interne.

Aux faibles vitesses d'écoulement, la surface seuil, qui sépare les deux régions, représente des zones assez minces de raccordement entre la vitesse à l'infini V est la vitesse nulle imposée par la condition d'adhérence à la paroi. Elle peut être désignée donc comme la couche limite viscoplastique.

Le premier point de distinction entre la couche limite visqueuse et la couche limite viscoplastique est que dans la première le gradient de pression est obtenu avec la condition de l'écoulement irrotationnel à l'infini. Dans la couche limite viscoplastique, l'expression du gradient de pression est obtenue avec la condition de déformation élastique du gel dans la région externe. La continuité fait que le long de la surface seuil le gradient de pression, aussi bien les vitesses et les composantes du tenseur \mathbf{T} , sont identiques de part et d'autre des deux régions.

Sur ces bases, nous présenterons dans cette section la formulation simplifiée des équations de mouvement dans la région interne aussi bien dans la région externe. Nous commencerons d'abord par la première région et nous terminerons par la deuxième.

2.2.1 Les équations simplifiées de Cauchy dans la région interne

L'hypothèse principale consiste à supposer que les vitesses d'écoulement sont très faibles pour que l'épaisseur de la couche limite δ soit très petite devant la longueur de la plaque. Nous donnerons ensuite une condition simple permettant de s'assurer de l'hypothèse. De cette façon, nous pouvons introduire le paramètre $\varepsilon = \delta/a$ (où a est la demi-longueur de la plaque) et de supposer que celui-ci est très petit devant 1. On se ramène alors à un problème de l'écoulement d'un modèle d'Herschel-Bulkley dans un long domaine. C'est un problème qui a été déjà traité par Piau en 1996, mais ici la pression doit être normalisée avec la valeur du seuil de contrainte au lieu de la contrainte inertielle. De plus, nous pouvons négliger dans notre cas la gravité, c'est à dire l'influence du nombre de Froude.

Sans trop rentrer dans les détails de calculs, nous signalons que les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent avec les paramètres adimensionnels suivants :

$$(X, Y, U, V, P, T) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{\varepsilon a}, \frac{u}{V}, \frac{v}{\varepsilon V}, \frac{p}{s}, \frac{V t}{a} \right) \quad (3)$$

suit l'axe (Ox), comme suit :

$$Re \frac{dU}{dT} + Od P_{,X} = \left(|U_{,Y}|^{n-1} U_{,Y} \right)_{,Y} + 2 Od \varepsilon \left\{ \left(\frac{U_{,X}}{U_{,Y}} \right)_{,X} - \left(\frac{U_{,X}^2}{U_{,Y}^2} \right)_{,Y} \right\} \times \text{sgn}(U_{,Y}) \quad (4)$$

(i.e., les termes $t_{xy,y}$ $t_{xx,x}^s$ $t_{xy,y}^s$)

et suivant l'axe (Oy) :

$$Re \varepsilon^2 \frac{dV}{dT} + Od P_{,Y} = -2 Od \varepsilon \left\{ \left(\frac{U_{,X}}{U_{,Y}} \right)_{,y} \right\} \times \text{sgn}(U_{,Y}) \quad (5)$$

(i.e., le terme $t_{yy,y}^s$)

où $\text{sgn}(U_{,Y})$ est le signe de la dérivée partielle de U par rapport à Y .

avec

$$Re = \frac{\rho V^{2-n} (\varepsilon a)^n}{K} \varepsilon \quad \text{et} \quad Od = \frac{s \varepsilon \left(\frac{\varepsilon a}{V} \right)^n}{K} \quad (6)$$

D'autre part, l'équation de conservation de la masse s'écrit, comme suit :

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \quad \text{ou bien} \quad U_{,X} + V_{,Y} = 0 \quad (7)$$

Les conditions aux limites à vérifier à la paroi et le long de la surface seuil sont, respectivement :

$$\begin{aligned} Y = 0 ; & & U = V = 0 & & \text{pour } X > 0 \\ Y = 1 ; & & U = 1, V = 0, & & |P_{,X}| \approx 1 \end{aligned} \quad (8)$$

Les termes intervenants dans l'équation [4] représentent successivement l'inertie, la pression, la variation de la contrainte tangentielle visqueuse $t_{xy,y}$, la variation de la contrainte normale $t^s_{xx,x}$ et la variation de la contrainte tangentielle plastique $t^s_{xy,y}$. L'indice s indique la contribution du terme plastique. Notons que tous les termes d'ordre $O(\varepsilon^2)$ ont été négligés dans les équations du mouvement.

Notre étude vise les écoulements à très faibles vitesses où le nombre de Reynolds Re tend vers 0. Il dans ce cas possible de négliger tous les termes d'inertie intervenants dans les équations du mouvement. Nous avons également spécifié notre étude au cas où $Od \approx 1$ afin de pouvoir équilibrer en grande partie la pression avec la contrainte visqueuse t_{xy} . Les variations des contraintes plastiques sont de l'ordre de ε , mais elles ne doivent pas être négligées, autrement l'influence du seuil de contrainte n'apparaît dans les équations du mouvement.

Dans ces conditions l'équation [5] peut être facilement intégrée. En dérivant ensuite le résultat par rapport à x, on obtient l'expression du gradient de pression interne, soit :

$$p_{,x} = -2 s \left\{ \left(\frac{u_{,x}}{u_{,y}} \right)_{,x} \right\} \text{sgn}(u_{,y}) + g_{,x} \quad (9)$$

où g est une fonction inconnue de x.

En remplaçant dans l'équation [4], il vient :

$$g_{,x} = K \left(|u_{,y}|^{n-1} u_{,y} \right)_{,y} + 2 s \left\{ \left(\frac{u_{,x}}{u_{,y}} \right)_{,x} - \left(\frac{u_{,x}^2}{u_{,y}^2} \right)_{,y} \right\} \text{sgn}(u_{,y}) \quad (10)$$

Les deux équations [8] et [9] associées à l'équation de conservation de la masse [7] constituent le modèle simplifié de l'écoulement d'un fluide viscoplastique ayant un comportement d'Herschel-Bulkley. Le modèle peut être valable dans la région interne, et notamment dans la partie centrale de la plaque. De plus, les vitesses d'écoulement doivent être très faibles et le nombre Od doit être voisin de 1. Cette dernière condition permet de déduire l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite, soit :

$$\delta = a \times \left[\frac{K}{s} \left(\frac{V}{a} \right)^n \right]^{1/(n+1)} \quad (11)$$

La quantité $(s/K) \times (a/V)^n$, qui sera désignée ultérieurement comme étant le nombre d'Oldroyd (Od), doit avoir des valeurs assez grandes pour que $\delta \ll a$ (ou bien $\varepsilon \ll 1$). C'est l'une des conditions théoriques principale qui limite le domaine de validité de notre étude.

Notons enfin que le fait de négliger l'inertie les propriétés physiques de l'écoulement (gradient de pression, vitesses, fonction de courant, la surface seuil) doivent avoir les mêmes valeurs de part et d'autre du centre de la plaque, c'est à dire doivent respecter la symétrie par rapport à l'axe (Δ), cf. figure 1. Cela est dû à l'invariance des scalaires T_{II} et D_{II} ainsi que la géométrie de l'écoulement avec la transformation $(1-x, y)$ à $(x-1, y)$. Dans le cas Newtonien, ou élastique, la symétrie est très bien connue. Il en est de même pour le modèle de Bingham (cf. Piau 2001) et c'est toujours exact dans le cas présent avec le modèle d'Herschel-Bulkley. Il faut donc impérativement chercher à respecter cette condition de symétrie.

2.2.2 La déformation du gel dans la région externe

Considérons la situation où le mouvement démarre d'un état de repos avec une vitesse constante. Au commencement, le déplacement relatif du matériau par rapport à la plaque est constant sur la surface de la plaque, mais après un temps suffisant, des contraintes et des tensions peuvent être créées au voisinage de l'objet qui deviennent assez importantes pour que le fluide coule, mais le matériau loin de la plaque est simplement déplacé.

Pour un mouvement bidimensionnel, la solution donnant le champ des contraintes est bien connue pour un matériau élastique ayant le comportement de Hooke (cf. Johnson 1987 et Piau 2001). Nous n'allons pas présenter ici toute la solution, on se contentera uniquement de donner les résultats les plus utiles pour notre travail. Mais signalons toutefois que sous ces effets élastiques, le mouvement relatif du gel par rapport à la plaque crée un état de contrainte qui est fortement sous l'influence des deux singularités des fins de la plaque, et aussi par l'étendu du réservoir contenant l'objet solide. La composante σ_{xx} du tenseur Σ varie en logarithme des coordonnées. Ce qui fait que la dimension limitée du réservoir contenant l'objet peut provoquer des effets sur l'écoulement.

Pour les écoulements à faibles vitesses, il est raisonnable de s'attendre à ce que les conditions d'écoulement maintiennent la surface d'adhérence de la plaque à une valeur de contrainte proche de la valeur seuil s . Dans ce cas, la répartition de la pression le long de la surface seuil s'écrit, comme suit :

$$p = \frac{-s}{\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (12)$$

avec

$$r_1 = \sqrt{(x^* - a)^2 + y_\infty^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x^* + a)^2 + y_\infty^2} \quad \text{et} \quad x^* = x - a \quad (13)$$

Cela dans l'hypothèse qu'il n'existe pas à la paroi de déplacement du matériau suivant la direction normale à la plaque (c'est à dire suivant l'axe Oy) et que toutes les composantes du tenseur des contraintes Σ sont nulles sur l'axe de symétrie (Δ).

$y_\infty = y_\infty(x^*)$ représente la surface seuil. Avec le critère de plasticité adopté (critère de Von Mises), elle peut être calculée numériquement à partir de l'équation implicite suivante :

$$\left[2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)\right]^2 + \left[2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - (\cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2)\right]^2 = 4\pi^2 \quad (14)$$

avec

$$\theta_1 = \pi - \arct\left(\frac{y_\infty}{a - x^*}\right) \quad \text{et} \quad \theta_2 = \arct\left(\frac{y_\infty}{x^* + a}\right) \quad \text{pour} \quad -a \leq x^* \leq a \quad (15)$$

Elle est tracée sous forme graphique sur la figure 2. La surface seuil ($y_\infty(x)$) respecte donc bien la symétrie par rapport à l'axe (Δ) (figure 1). En allant du centre de la plaque ($x^* = 0$), où l'épaisseur de la surface seuil est nulle, vers les deux extrémités, on peut remarquer que la surface seuil augmente progressivement pour attendre un maximum (d'environ $0.0725a$) lorsque $x^* = \mp 0.838a$. La surface seuil diminue ensuite. Elle atteint la valeur $0.0472a$ aux deux extrémités de la plaque ($x^* = \mp 1$). A cet endroit la pression est d'environ $1.193s$ et à l'endroit où l'épaisseur de la surface seuil est maximale, elle est d'environ $0.744s$.

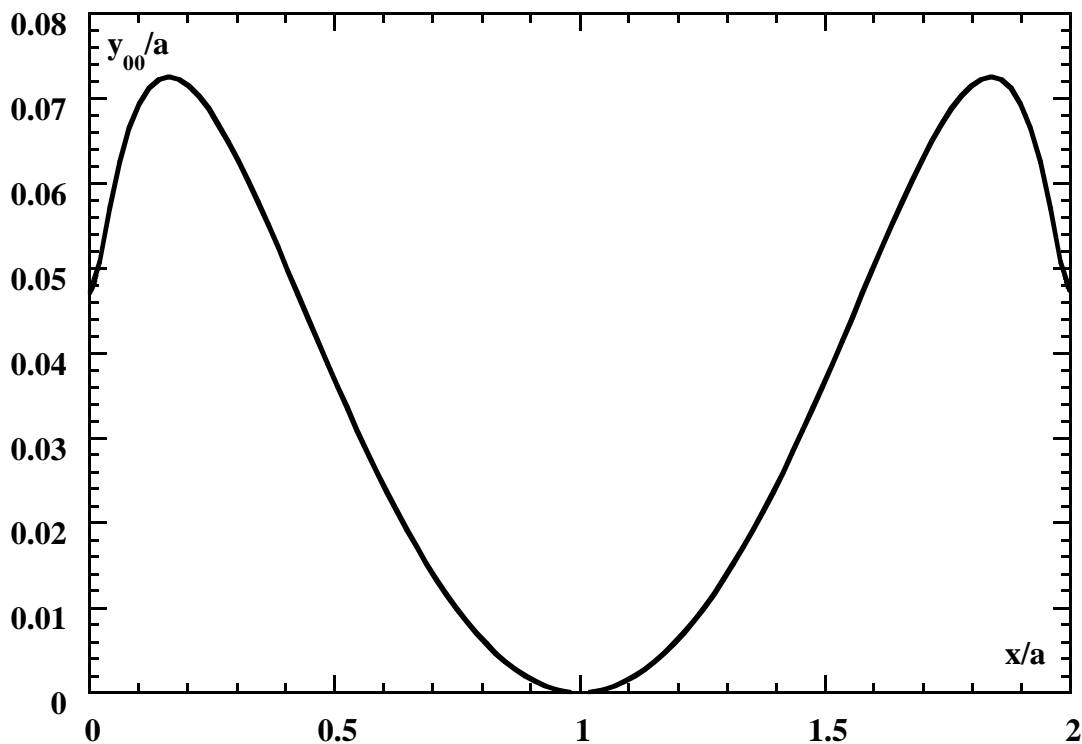


Figure 2 : Surface seuil pour un matériau élastoplastique ayant le critère de plasticité de Von Mises. Le comportement élastique du matériau est celui de Hooke

Ces résultats indiquent que l'épaisseur maximale de la surface seuil est assez faible devant la longueur totale de la plaque (le rapport est d'environ $1/28$). Cela justifie en partie notre hypothèse selon laquelle le paramètre ε est très petit devant 1 dans l'étude de la région interne. Il convient cependant de signaler que cette surface seuil est différente de la couche limite que nous verrons dans la suite, car ici on ne tient pas compte de la viscosité. En revanche, la pression externe donnée par cette théorie purement élastoplastique constitue une bonne approximation du problème, notamment dans la partie centrale de la plaque.

D'autre part, au voisinage immédiat du centre de la plaque, il apparaît (voir Fig. 3) que le gradient de pression peut être approché à une valeur constante, soit :

$$p_{,x} \approx -\frac{2s}{\pi a} \quad ; \quad p = -\frac{2s x^*}{\pi a} \quad (16)$$

C'est avec cette dernière expression que nous effectuerons d'abord nos premiers calculs. Nous proposons à la fin une solution optimale tenant compte de la variabilité, le long de la surface seuil, du gradient de pression et de sa valeur finie aux deux extrémités de la plaque. Notons enfin que l'égalité entre l'expression du gradient de pression externe ainsi obtenue et l'expression obtenue précédemment dans la région interne (Eq. [9] avec $y = y_\infty$), constituent une condition supplémentaire de continuité à vérifier impérativement, soit d'une manière exacte, ou faut de mieux, d'une manière approximative.

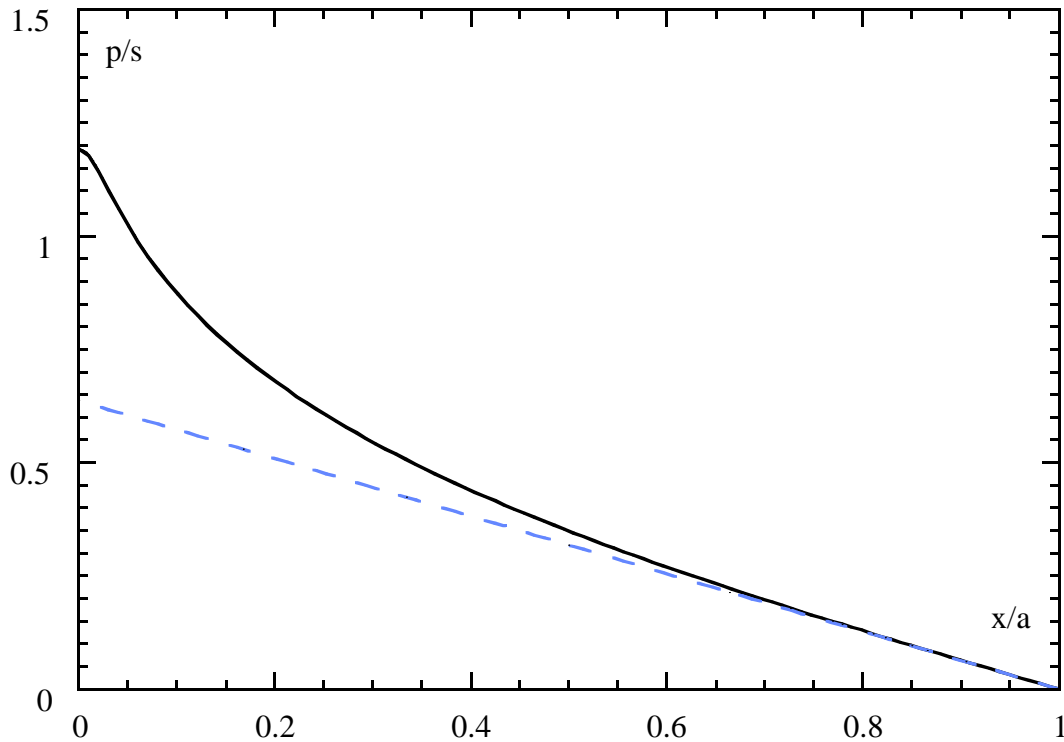


Figure 3 : Pression externe le long de la surface seuil (—) et approximation de la pression externe dans la partie centrale de la plaque (- - -)

2.3 Solutions semblables

Nous chercherons ici des solutions semblables du profil de vitesse de la forme $u = V G(\eta)$ avec $\eta = y/\delta(x)$ où $\delta(x)$ est une fonction de x en relation avec l'épaisseur de la couche limite y_∞ . En introduisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$(x_+, y_+, u_+, v_+, p_+, g_+, \delta_+) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{u}{V}, \frac{v}{V}, \frac{p}{s}, \frac{g}{s}, \frac{\delta}{a} \right) \quad (17)$$

Et en supposant que le signe de $u_{,y}$ est partout positif, l'équation [10] devient :

$$\beta Od = \left[\left(\frac{dG}{d\eta} \right)^n \right]' - 4\alpha Od \eta \quad (18)$$

Celle-ci est formellement identique à l'équation [10] à condition que β et α soient des scalaires et que :

$$\delta_+^{n+1} \times \frac{d^2 \delta_+}{dx_+^2} = \alpha \quad \text{et} \quad \delta_+^{n+1} \times \frac{d\delta_+}{dx_+} = \beta \quad (19)$$

Od est le nombre d'Oldroyd défini, comme suit :

$$Od = \frac{s}{K} \left(\frac{a}{V} \right)^n \quad (20)$$

D'autre part, avec l'hypothèse de départ l'équation de conservation de la masse [7] donne l'expression de la vitesse v_+ , on a :

$$v_+ = -\frac{d\delta_+}{dx} (F - \eta G) \quad \text{où} \quad G = \frac{dF}{d\eta} \quad (21)$$

Celle-ci est nécessaire notamment pour vérifier les conditions aux limites du problème. Le gradient de pression interne le long de la couche limite peut être déduit à partir de l'équation [9], on trouve :

$$p_{+,x^+} = -2 \left\{ \frac{d^2 \delta_+}{dx_+^2} - \frac{1}{\delta_+} \left(\frac{d\delta_+}{dx_+} \right)^2 \right\} \eta_\infty + \frac{\beta}{\delta_+^{n+1}} \quad (22)$$

où $y_\infty = \eta_\infty \delta_+$ désigne l'épaisseur de la couche limite.

Ainsi la résolution de l'équation [18] avec les conditions aux limites à la paroi et le long de la couche limite permet de déduire le profil de vitesse. L'équation [19-a] donne le profil de la couche limite. Les autres propriétés physiques de l'écoulement, telle que la force de traîné, sont obtenues en assurant la continuité du gradient de pression le long de la surface seuil.

2.3.1 Profils physiques de la couche limite

Remarquons d'abord que l'équation différentielle de deuxième ordre [19-a] peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left(\frac{d\delta_+}{dx_+} \right)^2 = 2n \left(k - \frac{\alpha}{\delta_+^n} \right) \quad (23)$$

C'est à dire sous forme d'une équation différentielle de premier ordre. k est une fonction scalaire.

Suivant les signes de α et k , on obtient plusieurs formes du profil de la couche limite, mais seulement quelques-unes correspondent au problème considéré. Nous n'allons pas les présenter tous. Nous retenons que deux profils susceptibles d'être les plus physiques : le profil d'épaisseur constante (CTBL) et le profil en forme de lentille (LSBL). Pour les autres, on peut consulter le travail de Piau (2001) relatif au modèle de Bingham. L'allure générale des profils examinés par l'auteur et les conclusions qui viennent à la fin restent identiques dans le cas présent avec le modèle d'Herschel-Bulkley.

(a) Couche limite d'épaisseur constante (CTBL):

Il se présente avec $\alpha = 0$, $k = 0$ et $\delta_+ = \text{Constante}$. Les lois qui peuvent être déduites à partir de ce profil sont simples et peuvent être intéressantes pour donner un ordre de grandeur de l'écoulement. L'inconvénient majeur du profil est qu'il ne tient pas compte des deux singularités aux fins de la plaque.

(b) Couche limite en forme de lentille (LSBL):

On est dans ce cas lorsque $\alpha < 0$ et $k < 0$. Pour plus de simplifications, on introduit les paramètres suivants :

$$\Delta = \frac{\delta_+}{\delta_{+m}} \quad \text{et} \quad X = \frac{x_+}{x_{+m}} \quad (24)$$

avec

$$\delta_{+m} = \left| \frac{\alpha}{k} \right|^{1/n} \quad \text{et} \quad x_{+m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2n}} \frac{\delta_{+m}}{\sqrt{|k|}} \quad (25)$$

L'équation [23] devient alors :

$$\left(\frac{d\Delta}{dX} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \left(\operatorname{sgn}(k) - \frac{\operatorname{sgn}(\alpha)}{\Delta^n} \right) \quad \text{avec} \quad \Delta \leq 1 \quad (26)$$

En posant $m = 1/n$, $\Delta_n = \Delta^n$ et $X_1(m) = 1/x_{+m}$ et utilisant les conditions $\Delta_n(1-x_+ = 1) = 0$ et $\Delta(x_+ = 1) = 1$, cette dernière équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\pi X_1}{2m} |1-x_+| = \mp \int_{\Delta_n}^1 \sigma^{m-1} \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}} d\sigma \quad \text{avec} \quad X_1(m) = \mp \frac{2m}{\pi} \int_0^1 \sigma^{m-1} \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}} d\sigma \quad (X_1 > 0) \quad (27)$$

Les intégrales intervenant dans ces expressions possèdent deux solutions analytiques seulement : lorsque $m = p+1$ et $m = p+1/2$ où p est un entier.

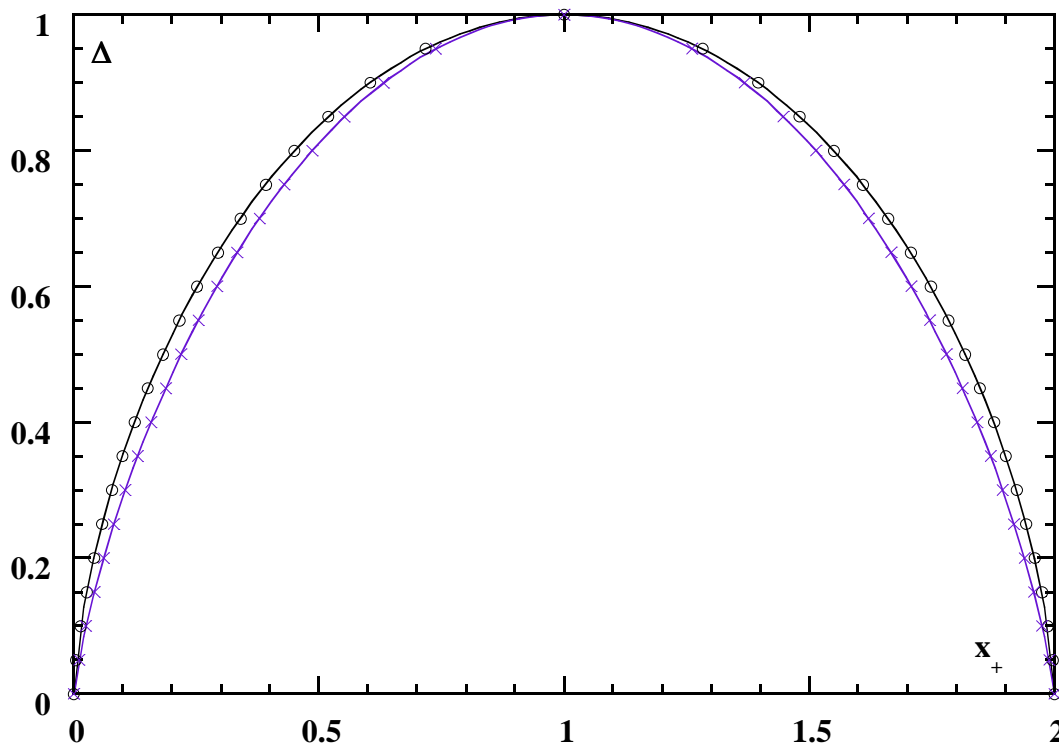


Figure 4 : Influence de l'indice de rhéofluidification sur le profil semblable de la couche limite o $m = 1$; x $m = 3$

- Dans le cas $m = p + 1$, la solution générale est la suivante :
- Dans le cas $m = p + 1/2$, la solution générale est la suivante :

$$\frac{\pi X_1}{2p+1} |1-x_+| = 2\sqrt{1-\Delta_n} \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^i}{2^{i+1}} C_i^p (1-\Delta_n)^i \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{2(2p+1)}{\pi} \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^i}{2^{i+1}} C_i^p$$

où

$$C_i^p = \frac{p!}{(p-i)! i!}$$

Ces expressions donnent les profils de la couche limite. Ils sont représentés graphiquement sur la figure 4 pour $m = 1$ et $m = 3$. La forme de la couche limite est donc différente de la surface seuil obtenue précédemment avec la théorie purement élastoplastique. La cause est que dans cette analyse le matériau est prie purement viscoplastique. On tient pas compte par conséquent des effets élastiques du matériau, mais la viscosité est bien prise en compte. Remarquons également que les profils de la couche limite respectent bien la symétrie par rapport à l'axe (Δ). On peut aussi constater la très faible influence de l'indice m sur les profils semblables de la couche limite.

Notons enfin que la construction complète des profils expérimentaux de la couche limite, nécessite de connaître la valeur d'un seul paramètre qui est l'épaisseur de la couche limite au centre de la plaque (δ_{+m}), c'est dans la section (2-3-3) que nous donnerons son expression.

2.3.2 Profils de vitesse

Posons :

$$A = 2Od \alpha \quad \text{et} \quad B = \beta Od \quad (28)$$

L'équation différentielle de deuxième ordre [18] devient :

$$\left[\left(\frac{dG}{d\eta} \right)^n \right]' = B + 2 A \eta \quad (29)$$

Elle doit être intégrée avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \eta = 0; & \quad G = F = 0 \\ \eta = \eta_\infty; & \quad G = 1, G' = 0, F = \eta_\infty \end{aligned} \quad (30)$$

Pour la CTBL ($\delta_+ = \text{Constante}$), il n'est pas nécessaire de vérifier les conditions de la fonction $F(\eta)$, car dans ce cas la composante de vitesse v_+ est partout nulle compte tenu de l'équation [21]. Elle vérifie donc toutes les conditions aux limites du problème.

(a) *Couche limite d'épaisseur constante (CTBL) :*

Il correspond à $A = 0$. Avec cette valeur de A et les conditions aux limites [30], l'équation [29] peut être intégrée facilement, on obtient :

$$G(\eta) = 1 - \left(1 - \frac{\eta}{\eta_\infty} \right)^{m+1} \quad \text{avec} \quad B = - \left(\frac{m+1}{\eta_\infty^{m+1}} \right)^{1/m} \quad (31)$$

On vérifie que :

$$\left(\frac{dG}{d\eta} \right)_{\eta=0} = \frac{m+1}{\eta_\infty} \quad (32)$$

La fonction $G(\eta)$ qui donne le profil de vitesse u_+ est représentée graphiquement sur la figure 5 pour trois valeurs de m (1, 2 et 3). On peut remarquer que les profils semblables de vitesse sont assez sensibles aux variations de l'indice de rhéofluidification. Pour une valeur de

η donnée, l'augmentation de l'indice m entraîne des vitesses d'écoulement plus élevées et une concavité du profil de vitesse plus importante.

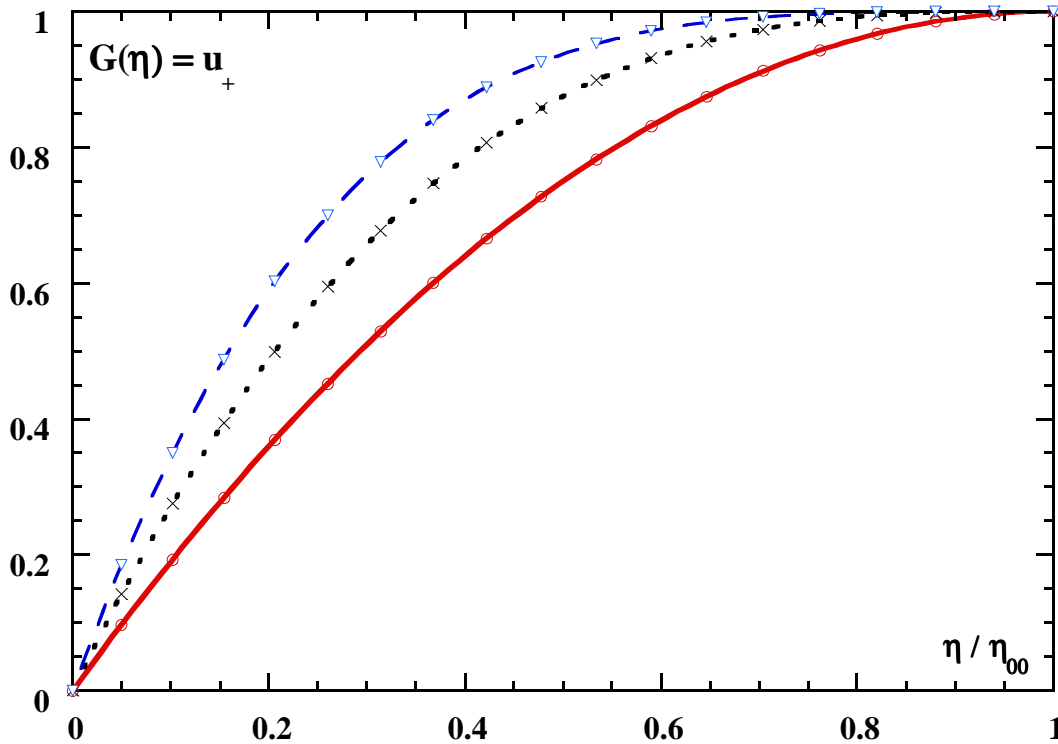


Figure 5 : Influence de l'indice de rhéofluidification sur le profil semblable de vitesse (CTBL et LSBL lorsque $\Sigma \rightarrow 0$): \circ $m = 1$; \times $m = 2$; ∇ $m = 3$

(b) *Couche limite en forme de lentille (LSBL)*:

Avec la condition $G'(\eta = \eta_\infty) = 0$, l'équation [29] peut être intégrée, on obtient :

$$\frac{dG}{d\eta} = (\eta_\infty - \eta)^m [-A(\eta_\infty + \eta) - B]^m \quad (33)$$

On vérifie que :

$$\left(\frac{dG}{d\eta} \right)_{\eta=0} = \frac{\Phi}{\eta_\infty} \left(\frac{1-\Sigma}{\Sigma} \right)^m \quad \text{avec} \quad \Phi = |A|^m \eta_\infty^{2m+1} \quad (\Phi \geq 0) \quad (34)$$

Faisons maintenant le changement de variable $\eta_p = (\eta_\infty - \eta)/\eta_\infty$ et posons $\Sigma = (|A|\eta_\infty)/(2|A|\eta_\infty - B)$. On peut constater d'après l'équation [33] que $0 \leq \Sigma \leq 1$ ($Od \rightarrow \infty$ lorsque $\Sigma \rightarrow 0$ et $Od \rightarrow 0$ lorsque $\Sigma \rightarrow 1$). Ainsi, avec les conditions $G(\eta = 0) = 0$ et $G(\eta = \eta_\infty) = 1$, l'équation [33] se met sous la forme suivante :

$$G(\eta_p) = 1 - \Phi \int_0^{\eta_p} \sigma^m \left(\frac{1-\Sigma\sigma}{\Sigma} \right)^m d\sigma \quad \text{et} \quad \Phi = \Phi(m, \Sigma) = \left[\int_0^1 \sigma^m \left(\frac{1-\Sigma\sigma}{\Sigma} \right)^m d\sigma \right]^{-1} \quad (35)$$

On vérifie d'après ces deux dernières équations que le profil semblable de vitesse lorsque $\Sigma \rightarrow 0$ ($Od \rightarrow \infty$) est celle de la CTBL (Eq. [31]). Donc, les profils présentés sur la figure (5) correspondent aussi au cas considéré lorsque $\Sigma \rightarrow 0$.

Ici encore, les intégrales intervenant dans ces expressions possèdent deux solutions analytiques : lorsque $m = p + 1/2$ et $m = p + 1$ où p est un entier.

- Dans le cas $m = p + 1$, la solution générale est la suivante :

$$G(\eta_p) = 1 - \frac{\Phi \eta_p^{p+2}}{\Sigma^{p+1}} \left[\sum_{i=0}^{p+1} \frac{(-1)^i}{i+p+2} C_i^{p+1} (\Sigma \eta_p)^i \right] \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{\Sigma^{p+1}}{\sum_{i=0}^{p+1} \frac{(-1)^i}{i+p+2} C_i^{p+1} \Sigma^i}$$

- Dans le cas $m = p + 1/2$, la solution générale est la suivante :

Comme dans la couche limite visqueuse, la condition $v_+ = 0$ le long de la couche limite ne peut être vérifiée que d'une manière approximative. Pour tourner cette difficulté, nous retenons la solution de Piau (2001) qui consiste à vérifier $F(\eta = \eta_\infty) = \eta_\infty(1 + \zeta)$ au lieu de $F(\eta = \eta_\infty) = \eta_\infty$. Avec cette condition et la condition $F(\eta = 0) = 0$, il résulte :

$$\zeta = -\Phi \int_0^1 \int_0^\eta \sigma^m \left(\frac{1 - \Sigma \sigma}{\Sigma} \right)^m d\sigma d\eta \quad (36)$$

- Dans le cas $m = p + 1$, on a :

$$\zeta = \frac{\Phi^2}{\Sigma^{p+1}} \left[\sum_{i=0}^{p+1} \frac{(-1)^i}{(i+p+2)(i+p+3)} C_i^{p+1} \Sigma^i \right] - \Phi$$

- Dans le cas $m = p + 1/2$, on a :

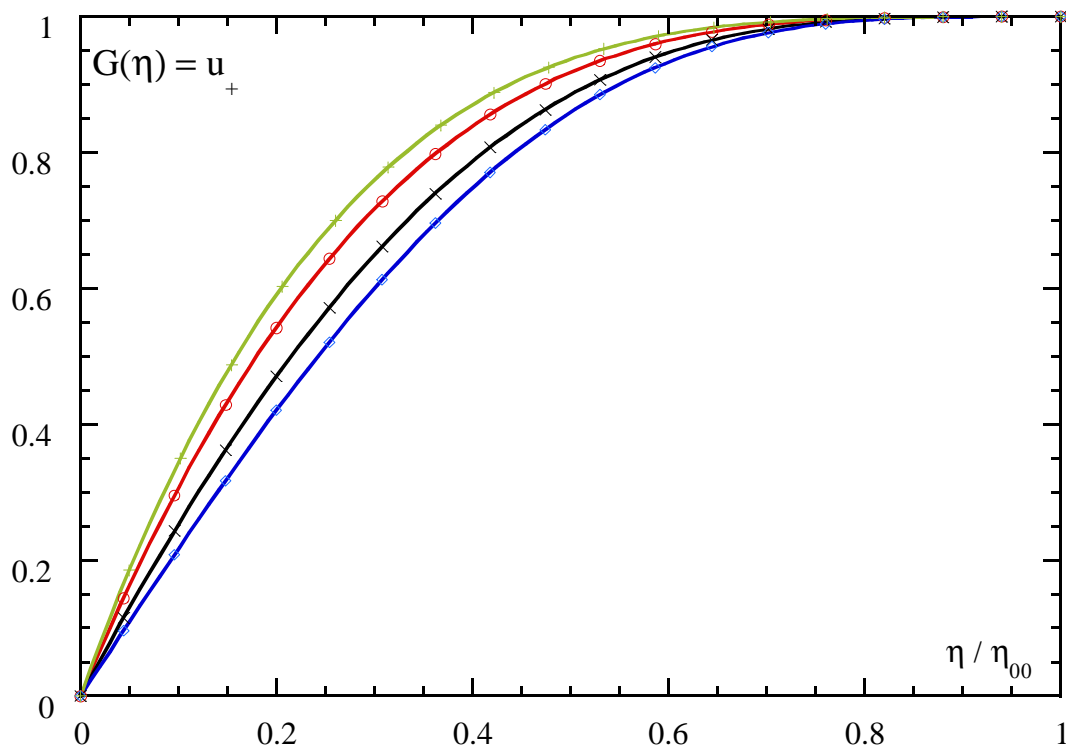


Figure 6 : Profils des vitesses stables pour $m = 3$ et $+\Sigma = 0$; $\circ \Sigma = 0.2$; $\times \Sigma = 0.4$; $\diamond \Sigma = 0.5$

A ce stade, il apparaît que Σ (ou ζ) est le seul paramètre inconnu. L'expression qui permet de déterminer la valeur de Σ connaissant les valeurs expérimentales du nombre d'Oldroyd (Od) et de l'indice de rhéofluidification n , sera établie dans la section suivante en assurant la

continuité du gradient de pression au centre de la plaque. On établira également l'expression de la force de traînée ainsi que l'expression du gradient de vitesse à la paroi. Mais essayons d'examiner avant la condition de stabilité des profils de vitesse indiqués par les expressions [35]. Il est tout à fait naturel de penser qu'en s'éloignant de la plaque le gradient de vitesse diminue. Les profils physiques de vitesse doivent donc impérativement vérifier la condition suivante :

$$\frac{d^2 G}{d\eta_p^2} = \phi m \eta_p^m \left(\frac{1 - \Sigma \eta_p}{\Sigma} \right)^m \left(\frac{2\Sigma \eta_p - 1}{1 - \Sigma \eta_p} \right) \leq 0$$

soit $\eta_p \leq 1/(2\Sigma)$. Puisque $0 \leq \eta_p \leq 1$, il faut dans tous les cas avoir $0 \leq \Sigma \leq 1/2$. La théorie ne peut donc pas être valable pour $1/2 \leq \Sigma \leq 1$, c'est-à-dire pour les faibles valeurs du nombre d'Oldroyd. Sur la figure 6 on représente les profils de vitesse stables pour $m = 3$. On peut remarquer que pour une valeur de η donnée, les vitesses d'écoulement augmentent avec la diminution du paramètre Σ , c'est-à-dire avec l'augmentation du nombre d'Oldroyd. Sur la figure 7 on représente l'allure des profils de vitesse instables obtenus avec $\Sigma = 0.9$.

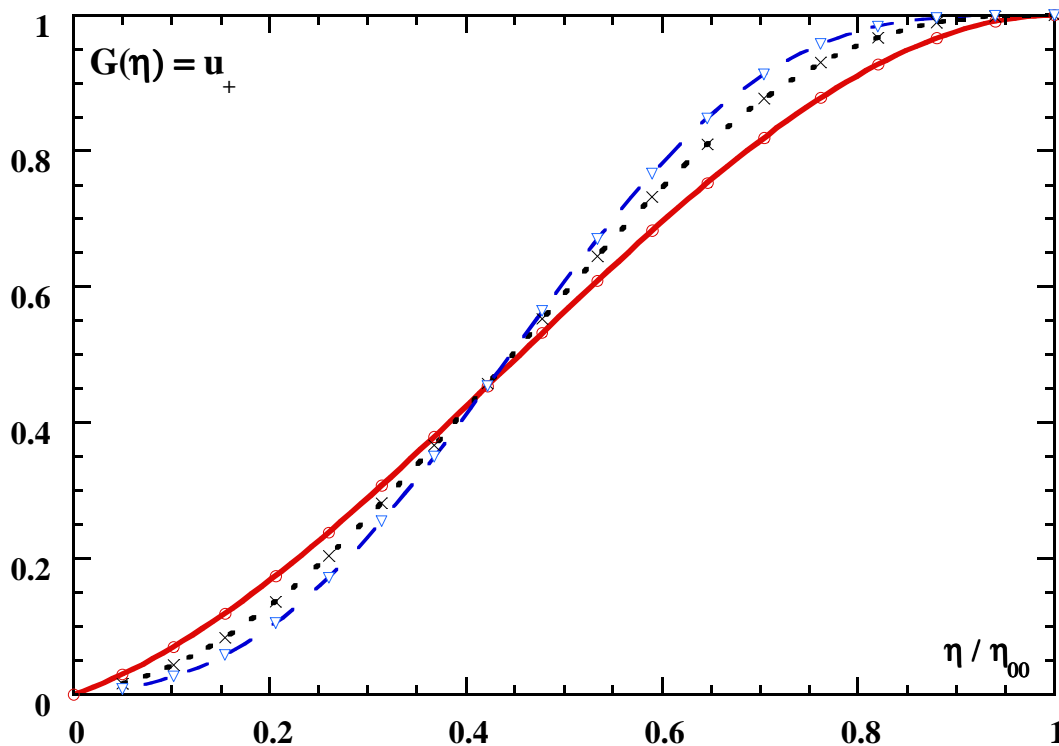


Figure 7 : Profils des vitesses instables pour $\Sigma = 0.9$ et
 ○ $m = 1$; × $m = 2$; ▽ $m = 3$

2.3.3 Gradient de pression le long de la couche limite et relations déduites

Nous examinerons d'abord le cas de CTBL, ensuite le cas de la LSBL et nous donnerons à la fin une solution optimale qui vérifie toutes les conditions du problème à un pourcentage près.

(a) Couche d'épaisseur constante (CTBL)

Avec $\delta_+ = \text{Constante}$, l'équation [22] devient :

$$p_{+,x^+}^i = \frac{\beta}{\delta_+^{n+1}} \quad (37)$$

L'indice i indique qu'il s'agit de la pression interne.

On ne peut vérifier la continuité du gradient de pression le long de la couche limite que d'une manière approximative, en se limitant uniquement à la partie centrale de la plaque où le gradient de pression externe prend une valeur quasiment constante. On peut dans ce cas utiliser l'expression [16-a] qui donne :

$$p_{+,x^+}^e = -\frac{2}{\pi} \quad (38)$$

L'indice e indique qu'il s'agit là de la pression externe.

La continuité fait que $p_{+,x^+}^i = p_{+,x^+}^e$, et donc : $\delta_+ = (-\beta\pi/2)^{1/(n+1)}$. Compte tenu des équations [31-b] et [28-b], on déduit l'expression de l'épaisseur de la couche limite, soit :

$$y_{+\infty} = \delta_{+m} \eta_{\infty} = C_{BL} \times Od^{-m/(m+1)} \quad \text{avec} \quad C_{BL} = \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^m (m+1) \right]^{1/(m+1)} \quad (39)$$

Ici, le gradient de vitesse est constant le long de la plaque. Il peut être calculé à partir de l'équation suivante :

$$u_{+,y^+} = \frac{1}{\delta_+} \left(\frac{dG}{d\eta} \right)_{\eta=0} \quad (40)$$

En remplaçant les expressions [39] et [32] dans l'équation [40], il vient :

$$u_{+,y^+} = C_{VG} \times Od^{m/(m+1)} \quad \text{avec} \quad C_{VG} = \left[\frac{2}{\pi} (m+1) \right]^{m/(m+1)} \quad (41)$$

La contrainte tangentielle à la paroi est également uniforme le long de la plaque. Son expression est :

$$\tau = s \left(1 + \frac{1}{\delta_+^n Od} \left(\frac{dG}{d\eta} \Big|_{\eta=0} \right)^n \right) \quad (42)$$

En intégrant cette expression le long des deux faces latérales de la plaque, on obtient l'expression de la force de traînée, soit :

$$T = 2 \int_0^{2a} \tau dx = 4sa \left(1 + C_{VD} \times Od^{-m/(m+1)} \right) \quad \text{avec} \quad C_{VD} = \left(\frac{2}{\pi} (m+1) \right)^{1/(m+1)} \quad (43)$$

De $m = 1$ jusqu'à $m = 3.270$ le coefficient C_{VD} augmente de 1.128 à 1.264, puis il diminue pour atteindre la valeur limite 1 lorsque $m \rightarrow \infty$. C_{VD} ne varie donc que de 1 à 1.264 pour tous les fluides rhéofluidifiants.

En définissant le coefficient de traînée plastique, comme suit :

$$C_D^s = \frac{T}{4sa} \quad (44)$$

Il résulte :

$$C_D^s = 1 + C_{VD} \times Od^{-m/(m+1)} \quad (45)$$

Retenons également que : $C_{VD} = C_{VG}^{1/m} = (2/\pi) C_{BL}$

Le problème est ainsi défini. Mais rappelons que cette solution ne tient pas compte des deux singularités aux fins de la plaque, elle est cependant simple et utile pour avoir un ordre de grandeur raisonnable des propriétés de l'écoulement.

(b) Couche limite en forme de lentille (LSBL):

En remplaçant l'équation [26] dans l'équation [22], on peut se ramener à écrire le gradient de pression interne sous la forme suivante :

$$P^i_{,X} = \frac{2 [m(2\Sigma - 1) - (m + 2) \Sigma]}{\Delta^{n+1} \Sigma} + \frac{4}{\Delta} \quad (46)$$

avec

$$P = \frac{P_+}{P_0} \quad \text{où} \quad P_0 = \frac{n\sqrt{|k|} \pi}{2\sqrt{2n}} \eta_\infty \quad (47)$$

Le gradient de pression externe dans la partie centrale de la plaque s'écrit d'après l'équation [16-a] et la définition de la variable P , comme suit :

$$P^e_{,X} = -\frac{2m (\delta_{+m} \eta_\infty)}{(|k| \eta_\infty^2) \pi} \quad (48)$$

Pour que dans la partie centrale de la plaque les solutions semblables existent réellement, il faut que $P^i_{,X}(\Delta = 1) = P^e_{,X}$.

D'après l'équation [46] on a :

$$P^i_{,X}(\Delta = 1) = -2m \left(\frac{1 - \Sigma}{\Sigma} \right) \quad (49)$$

En assurant la continuité ($P^i_{,X}(\Delta = 1) = P^e_{,X}$), il vient :

$$\frac{\delta_{+m} \eta_\infty}{|k| \eta_\infty^2 \pi} = \left(\frac{1 - \Sigma}{\Sigma} \right) \quad (50)$$

D'autre part, d'après la définition de la variable x_{+m} (Eq. [25-b]) et puisque $x_{+m} = 1/X_1(m)$, il vient :

$$\frac{\pi \sqrt{m}}{2\sqrt{2}} \frac{\delta_{+m} \eta_\infty}{\sqrt{|k|} \eta_\infty^2} = \frac{1}{X_1(m)} \quad (51)$$

En résolvant simultanément les deux équations [50] et [51], on obtient :

$$\sqrt{|k|} \eta_\infty = \frac{2\sqrt{2}}{X_1(m) \pi^2 \sqrt{m}} \left(\frac{\Sigma}{1 - \Sigma} \right) \quad (52)$$

En remplaçant cette relation dans l'équation [47-b], il vient :

$$P_0 = \frac{1}{m \pi X_1(m)} \left(\frac{\Sigma}{1 - \Sigma} \right) \quad (53)$$

On vérifie également qu'on a :

$$\delta_{+m} \eta_\infty = \frac{2^3}{\pi^3 X_1(m)^2 m} \left(\frac{\Sigma}{1 - \Sigma} \right) \quad (54)$$

Cette dernière relation représente l'épaisseur de la couche limite au centre de la plaque. Elle peut être utilisée pour calculer les valeurs expérimentales de Δ connaissant la valeur de Σ .

Le gradient de vitesse à la paroi peut être également calculé. Compte tenu des équations [54] et [34-a], il vient :

$$u_{+,y^+} = \frac{1}{\delta_{+m} \Delta} \left(\frac{dG}{d\eta} \right)_{\eta=0} = \frac{m \pi^3 X_1(m)^2 \Phi(\Sigma, m)}{2^3} \left(\frac{1-\Sigma}{\Sigma} \right)^{m+1} \frac{1}{\Delta} \quad (55)$$

La répartition de la contrainte tangentielle le long de la plaque est :

$$\tau = s + K (u_{,y})^n = s \left\{ 1 + \left(\frac{m \pi^3 X_1(m)^2 \Phi(\Sigma, m)}{2^3} \right)^{1/m} \left(\frac{1-\Sigma}{\Sigma} \right)^{(1+m)/m} \frac{1}{Od} \frac{1}{\Delta^n} \right\} \quad (56)$$

En intégrant cette expression le long des deux faces latérales de la plaque, on obtient l'expression de la force de traînée :

$$T = 4sa \left(1 + \frac{1}{X_1} \left(\frac{m \pi^3 \tau(m) X_1(m)^2}{2^3} \Phi(\Sigma, m) \left(\frac{1-\Sigma}{\Sigma} \right)^{1+m} \right)^{1/m} \frac{1}{Od} \right) \quad (57)$$

où

$$\tau(m) = \mp \frac{2m}{\pi} \int_0^1 \sigma^{m-2} \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}} d\sigma \quad \text{avec} \quad \tau(m) > 0 \quad (58)$$

L'ensemble des expressions précédentes relatives à la LSBL sont maintenant fonctions que d'une variable inconnue Σ . Il faut donc une dernière relation qui lie Σ au nombre Od et l'indice n (paramètres expérimentaux) pour définir complètement le problème. D'après l'expression de la variable δ_{+m} ($= |\alpha/k|^m$) et les équations [52], [34-b] et [28-a], on déduit que :

$$\left(\frac{1}{Od} \right)^m = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2^4}{m X_1(m)^2 \pi^4} \right)^{m+1} \frac{1}{\Phi(\Sigma, m)} \left(\frac{\Sigma}{1-\Sigma} \right)^{2m+1} \quad (59)$$

$\Phi = \Phi(\Sigma, m)$ (Eq.) et $X_1 = X_1(m)$. Connaissons les valeurs expérimentales de n et Od , il est donc possible de résoudre numériquement cette dernière équation pour déterminer la valeur de Σ , et de construire ainsi toute la solution.

D'après l'équation [59], il est aussi possible d'exprimer la relation [54], comme suit :

$$\delta_{m+} \eta_{\infty} = C_{BL} \times Od^{-m/(m+1)} \quad (60)$$

Avec

$$C_{BL} = \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^m \lambda \right]^{1/(m+1)} \quad \text{où} \quad \lambda(m, \Sigma) = \Phi(m, \Sigma) \left(\frac{1-\Sigma}{\Sigma} \right)^m \quad (61)$$

Le gradient de vitesse au centre de la plaque peut être déduit d'après l'équation [55] en posant $\Delta = 1$. D'après la relation [59], il est également possible de l'exprimer sous la forme la plus simple suivante :

$$u_{,y^+}^+ = C_{VG} \times Od^{m/(m+1)} \quad \text{avec} \quad C_{VG} = \left[\frac{2}{\pi} \lambda(m, \Sigma) \right]^{m/(m+1)} \quad (62)$$

En combinant les deux équations [59] et [57], le coefficient de traînée plastique C_D^s (Eq. [44]) peut être représenté, comme suit :

$$C_D^s = 1 + C_{VD} \times Od^{-m/(m+1)} \quad \text{avec} \quad C_{VD} = \Gamma(m) \times \left[\frac{2}{\pi} \lambda(m, \Sigma) \right]^{1/(m+1)} \quad (63)$$

où

$$\Gamma(m) = \frac{\tau(m)}{X_1(m)} = \frac{2m}{2m-1} \quad (64)$$

Retenons que : $C_{VD} = \Gamma(m) C_{VG}^{1/m} = (2/\pi) \Gamma(m) C_{BL}$

Cette nouvelle présentation est exactement analogue à celle de la CTBL. Il suffit de poser $\lambda = m+1$ et $\Gamma(m) = 1$ pour retrouver les expressions précédentes. Puisque Σ varie entre 0 et 1, il résulte d'après l'équation () que λ varie entre 0 et $(m+1)$. Donc, λ varie très peu avec le coefficient Σ (ou bien le nombre d'Oldroyd). La limite $\lambda = m+1$ correspond à $Od \rightarrow \infty$. Dans ce cas, l'épaisseur de la couche limite ainsi que le gradient de vitesse au centre de la plaque ont des valeurs égales à celles de la CTBL. Par contre, le coefficient C_{VD} qui intervient dans la définition du coefficient de traînée C_D^s est multiplié par la quantité $\Gamma(m)$. Ici, C_{VD} diminue toujours avec m pour tous les fluides rhéofluidifiants (de 2.257 à 1 lorsque m varie de 1 à l'infini).

D'après les deux équations [61] et [35-b], le paramètre λ prend l'expression suivante :

$$\lambda(m, \Sigma) = \left[\int_0^1 \sigma^m \left(\frac{1-\Sigma\sigma}{1-\Sigma} \right)^m d\sigma \right]^{-1} \quad (65)$$

- Dans le cas $m = p+1$, on a :

$$\lambda(m, \Sigma) = \frac{(1-\Sigma)^{p+1}}{\sum_{i=0}^{p+1} \frac{(-1)^i}{i+p+2} C_i^{p+1} \Sigma^i}$$

- Dans le cas $m = p+1/2$, on a :

Enfin, rappelons que cette solution suppose que l'épaisseur de la couche limite est nulle aux deux extrémités de la plaque et qu'elle ne vérifie la condition $P^i, X = P^e, X$ que dans la partie centrale de la plaque. Nous proposons maintenant une solution optimale qui permet de détourner en partie ces problèmes.

2.3.4 Optimisation du profil de la couche limite en forme de lentille (OLSBL)

Jusqu'à ce stade, nous avons présenté deux solutions : la solution de la couche limite d'épaisseur constante (CTBL) et la solution de la couche limite en forme de lentille (LSBL). Les deux sont efficaces et peuvent être utilisées, selon la précision désirée, pour résoudre des problèmes pratiques, mais les deux donnent respectivement un encadrement supérieur et inférieur de la vraie solution. En effet, la première (CTBL) ne tient pas compte ni des singularités aux fins de la plaque ni à la répartition non uniforme du gradient de pression le long de la couche limite. La deuxième (LSBL) améliore la première en tenant compte des singularités, mais la continuité du gradient de pression n'est vérifiée qu'approximativement ; uniquement dans la partie centrale de la plaque. Nous proposons ici une troisième solution plus réaliste, car elle tient compte mieux des singularités et aussi de la continuité du gradient de pression.

Compte tenu des conditions réelles de l'écoulement, nous considérons que l'épaisseur de la couche limite n'est pas nulle aux deux extrémités de la plaque ($\delta_+(1-x_+|1) = \delta_{+0}$ ou bien $\Delta(1-x_+|1) = \Delta_0$). De plus, nous supposons que le gradient de pression aux deux

extrémités de la plaque prend une valeur finie : $G/2$ fois plus grande que le gradient de pression au centre de la plaque (où G est un paramètre d'ajustement des courbes de pression). D'après les deux équations [49] et la condition $P^i_{,X} = P^e_{,X}$, on peut alors écrire au centre de la plaque :

$$-2 \frac{(|k|\eta_\infty^2)\pi \left(\frac{1-\Sigma}{\Sigma} \right)}{\delta_{+m} \eta_\infty} \equiv -2$$

Aux deux extrémités de la plaque ($\Delta = \Delta_0$), on a d'après l'équation [46] :

$$\frac{2}{m} \frac{(|k|\eta_\infty^2)\pi \left[\frac{\Sigma(m-2)-m}{\Delta_0^{n+1}\Sigma} + \frac{2}{\Delta_0} \right]}{\delta_{+m} \eta_\infty} \equiv -G$$

En combinant ces deux dernières équations, on obtient une relation simple qui lie Δ_0 à Σ , soit :

$$\left(\frac{\Sigma}{1-\Sigma} \right) \left[\frac{\Sigma(m-2)-m}{\Delta_0^{n+1}\Sigma} + \frac{2}{\Delta_0} \right] \equiv -\frac{mG}{2}$$

qui donne :

$$\Sigma = \frac{m(G\Delta_{n0}^{m+1} - 2)}{m(G\Delta_{n0}^{m+1} - 2) + 4(1 - \Delta_{n0})} \quad \text{avec} \quad \left(\frac{2}{G} \right)^{1/(m+1)} \leq \Delta_{n0} \leq 1 \quad (\Delta_{n0} = \Delta_0^n) \quad (66)$$

Dans la limite $\Sigma \rightarrow 0$ ($Od \rightarrow \infty$), l'équation [66] se simplifie à :

$$\Delta_{n0}(\Sigma = 0) = \left(\frac{2}{G_0} \right)^{1/(m+1)} \quad \text{avec} \quad G_0 = G(\Sigma = 0)$$

ou bien

$$\Delta_0(\Sigma = 0) = \left(\frac{2}{G_0} \right)^{m/(m+1)}$$

De cette manière, toutes les relations relatives à la LSBL établies précédemment restent dans ce cas valables à condition de prendre l'expression suivante de la fonction τ au lieu de l'équation [58] :

$$\tau = \tau(m, \Delta_{n0}) = \mp \frac{2m}{\pi} \int_{\Delta_{n0}}^1 \sigma^{m-2} \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}} d\sigma \quad \text{avec} \quad \tau > 0 \quad (67)$$

Pour assurer la condition $\Delta(|1-x_+|=1) = \Delta_0$ il faut également changer les expressions précédentes de X_1 par :

$$X_1 = X_1(m, \Delta_{n0}) = \mp \frac{2m}{\pi} \int_{\Delta_{n0}}^1 \sigma^{m-1} \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}} d\sigma \quad \text{avec} \quad X_1 > 0 \quad (68)$$

- Dans le cas $m = p+1$, on a :
- Dans le cas $m = p+1/2$, on a :

$$X_1 = \frac{2(2p+1)}{\pi} \sqrt{1-\Delta_{n0}} \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^i}{2^{i+1}} C_i^p (1-\Delta_{n0})^i \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2(2p+1)}{\pi} \sqrt{1-\Delta_{n0}} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-1)^i}{2^{i+1}} C_i^{p-1} (1-\Delta_{n0})^i$$

Enfin, il convient également de changer l'expression de Γ ([64]) par :

$$\Gamma = \Gamma(m, \Delta_{n0}) = \frac{\tau(m, \Delta_{n0})}{X_1(m, \Delta_{n0})} \quad (69)$$

Il reste maintenant à déterminer les valeurs du seul paramètre inconnu G par ajustement des profils de pression. L'équation [46] peut être intégrée facilement et donne l'expression de la pression interne, soit avec la condition $p_+^i(\Delta_n = 1) = 0$:

$$p_+^i = -\frac{8m}{\pi^2 X_1(m, \Delta_{n0})(1-\Sigma)} \left[(m(2\Sigma-1) - (m+2)\Sigma) \sqrt{\frac{1-\Delta_n}{\Delta_n}} + 2\Sigma a \tan\left(\sqrt{\frac{1-\Delta_n}{\Delta_n}}\right) \right] \quad (70)$$

Ainsi, le procédé de calcul utilisé est le suivant :

1. Pour des valeurs de G et Δ_{n0} on calcul d'après l'équation [66] la valeur de Σ
2. X_1 est calculé d'après l'équation [68]
3. Pour des valeurs de Δ_n comprises entre Δ_{n0} et 1, on calcul d'après l'équation [27] les valeurs de x_+ correspondantes.
4. Les valeurs de $p_+^i(\Delta_n)$ sont calculées d'après l'équation [70]
5. Les valeurs de $y_{\infty+}(x_+)$ sont calculées en utilisant l'équation implicite [14].
6. Les valeurs de $p_+^e(x_+, y_{\infty+})$ sont calculées d'après l'équation [12].
7. On trace les courbes $p_+^e(x_+)$ et $p_+^i(x_+)$. La valeur de G est ensuite modifiée jusqu'à avoir un écart minimum entre p_+^e et p_+^i .

On représente sur la figure 8 le résultat de notre calcul pour $m = 3$. On peut remarquer un accord raisonnable entre la pression interne et la pression externe première courbe et la dernière. Dans le tableau 1, on représente quelques valeurs numériques des paramètre intervenant dans les différentes solutions lorsque $\Sigma \rightarrow 0$ ($Od \rightarrow \infty$). Remarquons que l'épaisseur de la couche limite aux deux extrémités de la plaque diminue avec l'augmentation de l'indice m . La figure 9 montre la variation du paramètre G avec l'indice m lorsque $Od \rightarrow \infty$. Le paramètre G augmente donc avec m . Les résultats numériques ont été ajusté par la méthode des moindres carrés avec la loi suivante :

$$G_0 \approx 16.4 m^{0.37}$$

L'écart maximum est de 2% lorsque m varie entre 1 et 5.

Pour les trois solutions (CTBL, LSBL et OLSBL) on représente sur la figure 10 la variation du coefficient C_{VD} , qui intervient dans l'expression de la force de traînée, avec l'indice m . Les valeurs de l'OLSBL se trouvent entre celles de la CTBL, qui donne une borne inférieure, et celle de la LSBL, qui donne une borne supérieure. On peut voir aussi d'après la courbe que les valeurs de C_{VD} des deux solutions (OLSBL et LSBL) se rapprochent assez bien à partir d'une certaine valeur de m . En plus, il apparaît que C_{VD} ne varie pas beaucoup avec m . Pour tous les fluides rhéofluidifiants, C_{VD} (OLSBL) ne varie que de 50% au maximum.

Le tableau 2 donne un abaque des données numériques des principaux paramètres qui interviennent dans l'OLSBL. Il montre à la fois l'influence de l'indice m et du paramètre Σ (c'est-à-dire Od). Pour une valeur de m donnée, on peut remarquer que Δ_0 augmente avec la diminution de Od . Par contre le paramètre G , le coefficient C_{VD} ainsi que C_{BL} diminuent avec Od . En définissant les deux paramètres suivants :

$$G^* = \left(\frac{2}{G}\right)^{m/(m+1)} - \left(\frac{2}{G_0}\right)^{m/(m+1)} \quad \text{et} \quad \Delta_0^* = \Delta_0 - \left(\frac{2}{G_0}\right)^{m/(m+1)}$$

Il apparaît d'après la figure 11, qu'on a quelque soit m et Od une relation de type $G^* = G^*(\Delta_0^*)$. Les valeurs numériques ont été ajustées par la méthode des moindres carrées avec la loi suivante :

$$G^* \approx \begin{cases} 2.722 \Delta_0^{*1.43} & \text{si } \Delta_0^* < 0.01 \\ 0.358 (\Delta_0^* - 0.005)^{0.86} & \text{si } \Delta_0^* > 0.01 \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant ces deux dernières lois on vérifie que le problème est complètement défini.

Vu les faibles variations des coefficients C_{VD} , C_{BL} et C_{VG} avec les paramètres expérimentaux m et Od , on peut déduire les ordres de grandeurs suivants :

Pour le coefficient de traînée :

$$C_D^s - 1 \approx Od^{-m/(m+1)}$$

Pour l'épaisseur de la couche limite au centre de la plaque :

$$y_{+\infty} \approx Od^{-m/(m+1)}$$

Et pour le gradient de vitesse au centre de la plaque :

$$u_{+,y^+} \approx Od^{m/(m+1)}$$

L'augmentation du nombre d'Oldroyd entraîne donc à la fois une diminution du coefficient de traînée et de l'épaisseur de la couche limite au centre de la plaque et une augmentation du gradient de vitesse au centre de la plaque. L'indice m agit également de la même manière.

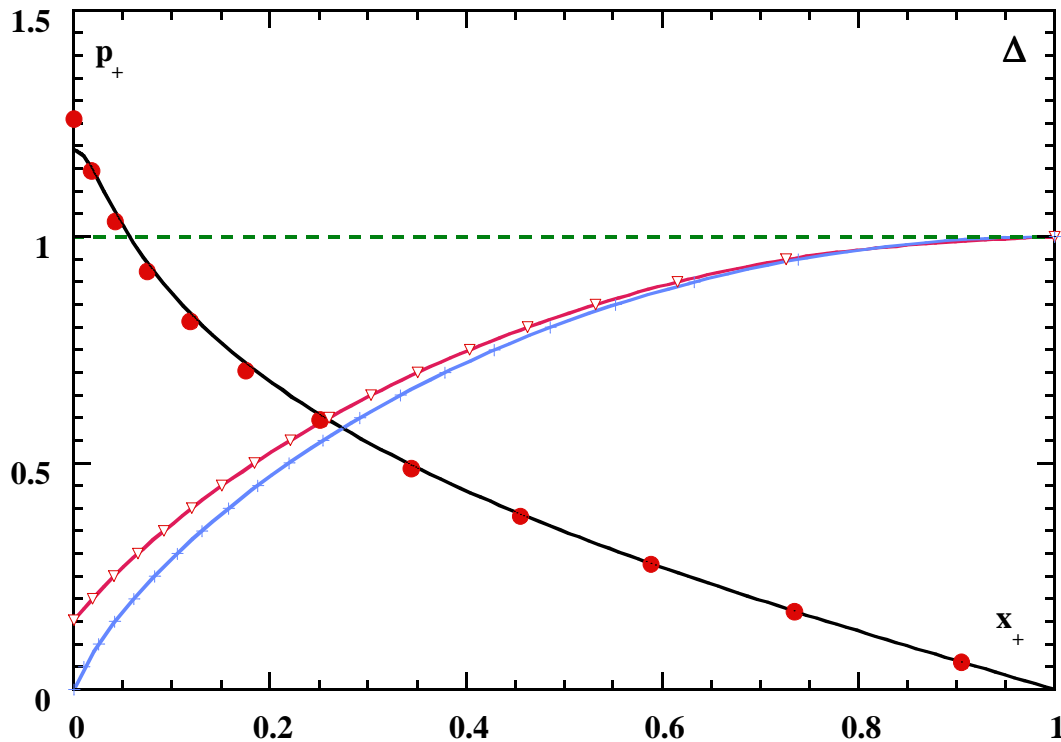


Figure 8 : Profils de pression et épaisseur de la couche limite pour $m=3$ et $\Sigma \rightarrow 0$:

- Pression pour le profil optimal de couche limite, — profil de pression externe, ∇ OLSBL, + LSBL - - - CTBL

Tableau 1 : Comparaison des valeurs numériques des coefficients intervenants dans les différentes solutions ($\Sigma \rightarrow 0$ c'est-à-dire $Od \rightarrow \infty$)

m	OLSBL					LSBL	CTBL
	G_0	Ecart maximal d'ajustement des courbes de pression (%)	X	Δ_0	C_{VD}	C_{VD}	C_{VD}
1	16.4	2.8	0.901	0.349	1.497	2.257	1.128
3/2	18.8	3.9	1.179	0.261	1.500	1.806	1.204
2	20.8	4.6	1.411	0.210	1.484	1.654	1.241
5/2	22.9	5.5	1.614	0.175	1.463	1.572	1.257
3	24.4	5.7	1.794	0.153	1.439	1.516	1.263
7/2	25.8	6.1	1.959	0.137	1.417	1.474	1.264
4	27.5	6.6	2.112	0.123	1.396	1.441	1.261
9/2	28.7	6.9	2.255	0.113	1.377	1.413	1.256
5	29.9	7.17	2.389	0.105	1.360	1.389	1.250

En annexe 1 on montre comment construire toute la solution connaissant les valeurs expérimentaux de Od et de m . L'annexe peut être aussi considéré comme un formulaire récapitulatif de la solution du problème. En annexe 2 on représente des solutions analytiques pour quelques valeurs particulières de l'indice m . On retrouve bien toute la solution de Piau (2001) relative au modèle de Bingham lorsque $m = 1$.

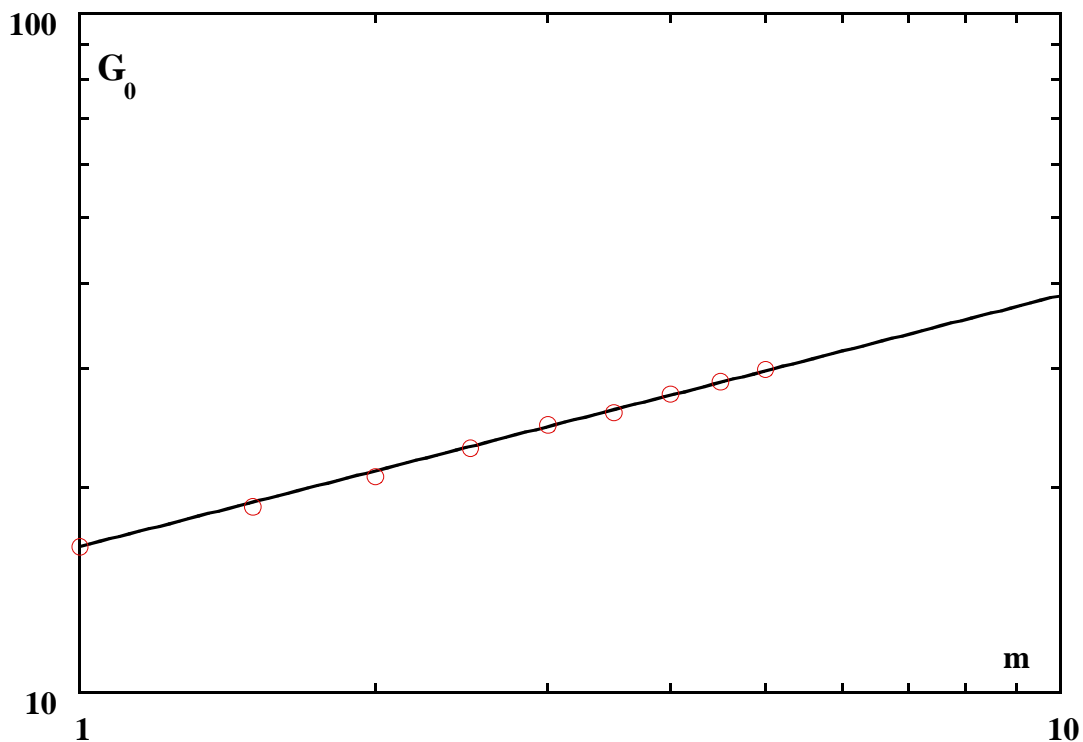


Figure 9 : Variation du paramètre G avec l'indice m lorsque $\Sigma \rightarrow 0$:

○ point obtenus par ajustement, — courbe de calage

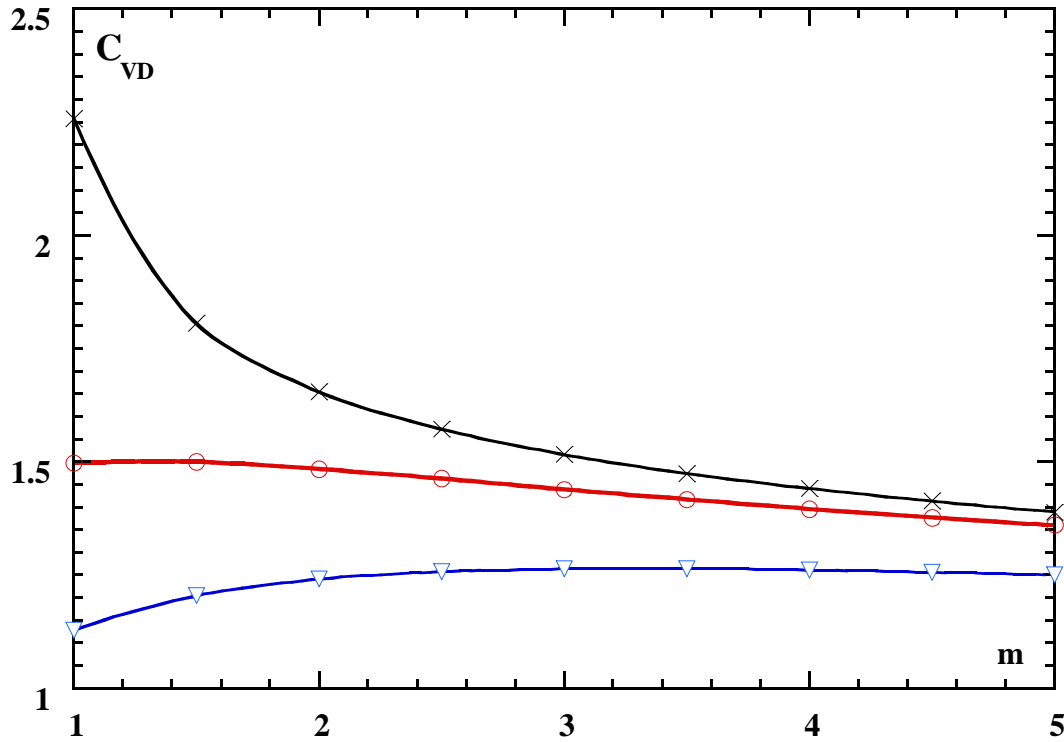


Figure 10 : Variation du coefficient C_{VD} avec l'indice m (lorsque $\Sigma \rightarrow 0$) et comparaison entre les différentes solutions :

∇ CTBL, \times LSBL, \circ OLSBL

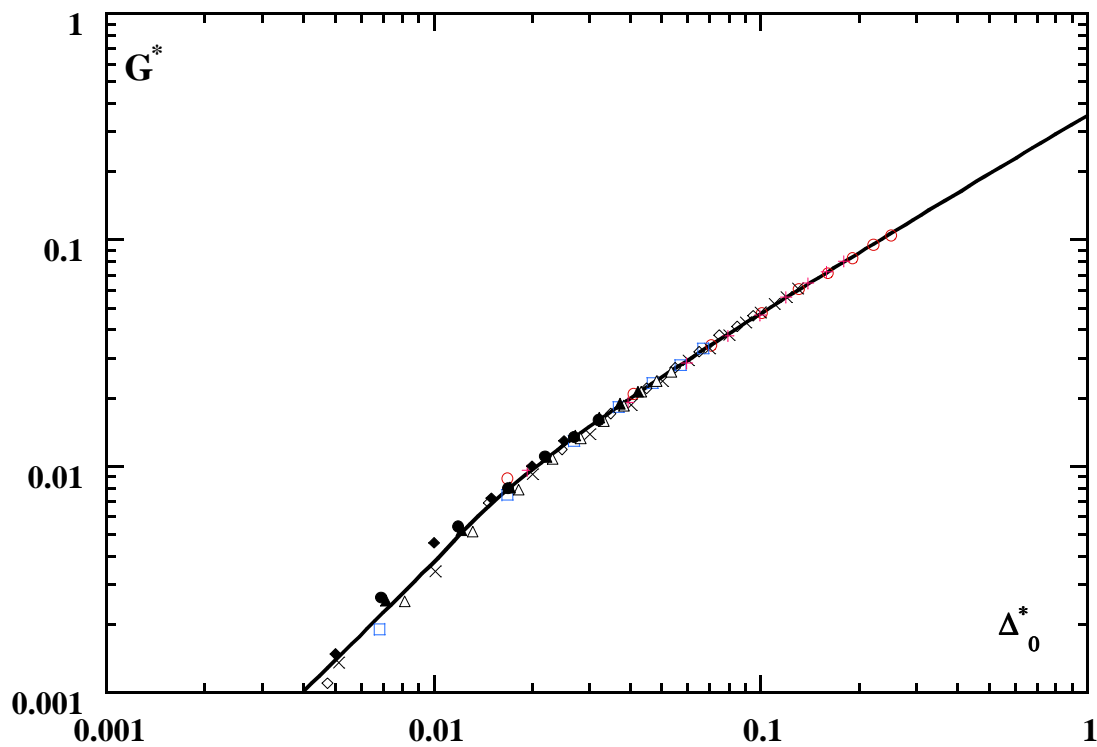


Figure 11 : Variation du paramètre G^* avec Δ_0^*

\circ $m=1$, $+$ $m=3/2$, \times $m=2$, \diamond $m=5/2$, \square $m=3$, Δ $m=7/2$, \blacktriangle $m=4$, \bullet $m=9/2$, \blacklozenge $m=5$
 ——— courbe de calage

Tableau 2 : Abaque des valeurs numériques des coefficients intervenants dans la OLSBL

Δ_0	Σ	G	Od	C_{VD}	C_{BL}
$m = 1$					
0.349	0	16.4	∞	1.497	1.128
0.366	0.034	15.6	$2.37 \cdot 10^4$	1.473	1.122
0.39	0.083	14.6	$3.38 \cdot 10^3$	1.440	1.112
0.42	0.147	13.6	846	1.398	1.097
0.45	0.206	12.7	333.5	1.357	1.082
0.48	0.263	11.9	158	1.317	1.067
0.51	0.324	11.3	77.1	1.274	1.048
0.54	0.378	10.7	41.6	1.233	1.029
0.57	0.427	10.1	24	1.194	1.010
0.60	0.483	9.7	13	1.149	0.986
$m = 3/2$					
0.261	0	18.8	∞	1.500	1.100
0.28	0.074	17.7	$6.099 \cdot 10^3$	1.468	1.086
0.30	0.143	16.7	$1.677 \cdot 10^3$	1.435	1.070
0.32	0.205	15.8	765.3	1.402	1.054
0.34	0.262	15	423.0	1.370	1.038
0.36	0.315	14.3	256.9	1.337	1.021
0.38	0.359	13.6	172.4	1.307	1.005
0.40	0.403	13	118.4	1.275	0.988
0.42	0.446	12.5	81.5	1.242	0.969
0.44	0.484	12	58.63	1.211	0.951
$m = 2$					
0.210	0	20.8	∞	1.484	1.067
0.215	0.039	20.6	$1.45 \cdot 10^4$	1.469	1.058
0.22	0.082	20.3	$5.98 \cdot 10^3$	1.457	1.052
0.24	0.179	18.9	$1.48 \cdot 10^3$	1.417	1.030
0.26	0.261	17.7	673	1.378	1.007
0.28	0.335	16.7	371.3	1.337	0.984
0.30	0.391	15.7	243	1.301	0.963
0.32	0.445	14.9	161.9	1.262	0.940
0.33	0.474	14.6	130.7	1.240	0.926
0.34	0.494	14.2	112	1.223	0.916
$m = 5/2$					
0.175	0	22.9	∞	1.463	1.036
0.18	0.068	22.7	$9.129 \cdot 10^3$	1.444	1.024
0.19	0.136	21.7	$3.024 \cdot 10^3$	1.421	1.011
0.20	0.205	20.9	$1.459 \cdot 10^3$	1.394	0.995
0.21	0.26	20.1	915.4	1.37	0.980
0.22	0.312	19.4	620	1.345	0.965
0.23	0.354	18.7	460	1.322	0.951
0.24	0.395	18.1	346.6	1.298	0.935
0.25	0.423	17.4	286.9	1.279	0.924
0.26	0.465	17.0	216.4	1.25	0.905
0.27	0.495	16.5	176.3	1.226	0.890

Tableau 2 : (Suite)

Δ_0	Σ	G	Od	C_{VD}	C_{BL}
$m = 3$					
0.153	0	24.4	∞	1.439	1.008
0.156	0.085	24.5	$7.22 \cdot 10^3$	1.418	0.994
0.16	0.122	24	$4.19 \cdot 10^3$	1.407	0.987
0.17	0.208	22.9	$1.72 \cdot 10^3$	1.377	0.969
0.18	0.28	21.9	988.7	1.348	0.95
0.19	0.341	21	649.4	1.319	0.932
0.2	0.396	20.2	457.2	1.289	0.913
0.21	0.445	19.5	334.6	1.258	0.893
0.22	0.485	18.8	260.5	1.23	0.874
$m = 7/2$					
0.137	0	25.8	∞	1.417	0.983
0.14	0.121	25.9	$4.839 \cdot 10^3$	1.388	0.964
0.145	0.178	25.2	$2.662 \cdot 10^3$	1.371	0.953
0.15	0.234	24.6	$1.668 \cdot 10^3$	1.352	0.941
0.155	0.28	24	$1.194 \cdot 10^3$	1.334	0.929
0.16	0.319	23.4	925	1.318	0.919
0.165	0.36	22.9	715.2	1.298	0.906
0.17	0.394	22.4	579	1.28	0.894
0.175	0.423	21.9	484.7	1.263	0.883
0.18	0.449	21.4	416.6	1.247	0.873
0.185	0.477	21	350.7	1.228	0.86
0.19	0.502	20.6	301.3	1.209	0.848
$m = 4$					
0.123	0	27.5	∞	1.396	0.961
0.13	0.187	26.8	$2.806 \cdot 10^3$	1.351	0.932
0.135	0.256	26.1	$1.653 \cdot 10^3$	1.329	0.917
0.14	0.311	25.4	$1.154 \cdot 10^3$	1.308	0.903
0.145	0.354	24.7	883.6	1.289	0.891
0.15	0.398	24.1	682.3	1.267	0.876
0.155	0.434	23.5	554	1.246	0.863
0.16	0.471	23	446.4	1.223	0.848
0.165	0.502	22.5	371.8	1.201	0.833
$m = 9/2$					
0.113	0	28.7	∞	1.377	0.942
0.115	0.124	28.8	$5.852 \cdot 10^3$	1.352	0.925
0.12	0.212	27.9	$2.604 \cdot 10^3$	1.328	0.91
0.125	0.29	27.1	$1.53 \cdot 10^3$	1.303	0.893
0.13	0.358	26.4	$1.01 \cdot 10^3$	1.275	0.875
0.135	0.402	25.6	785.6	1.254	0.861
0.14	0.453	25	588.5	1.225	0.842
0.145	0.495	24.4	466.4	1.198	0.824
$m = 5$					
0.105	0	29.9	∞	1.36	0.925
0.107	0.138	29.9	$5.604 \cdot 10^3$	1.333	0.907
0.11	0.218	29.4	$2.81 \cdot 10^3$	1.313	0.894
0.115	0.298	28.4	$1.659 \cdot 10^3$	1.287	0.877
0.12	0.377	27.6	$1.047 \cdot 10^3$	1.255	0.856
0.125	0.436	26.8	756.7	1.226	0.837
0.13	0.48	26	592.4	1.199	0.819

Annexe 1 : Construction de la solution connaissant les valeurs expérimentales de m et Od

Pour construire toute la solution de l'OLSBL connaissant les valeurs expérimentales de m ($1/n$) et Od , on doit d'abord résoudre numériquement une équation de type $F(Od, m, \Delta_{n0}) = 0$ dans le but de déterminer la valeur du paramètre Δ_{n0} . On a pour cela les expressions suivantes :

$$\left(\frac{1}{Od}\right)^m = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2^4}{m X_1(m, \Delta_{n0})^2 \pi^4} \right)^{m+1} \frac{1}{\Phi(\Sigma, m)} \left(\frac{\Sigma}{1-\Sigma} \right)^{2m+1}$$

Avec :

$$\Phi = \Phi(m, \Sigma) = \left[\int_0^1 \sigma^m \left(\frac{1-\Sigma\sigma}{\Sigma} \right)^m d\sigma \right]^{-1} ; \quad X_1 = X_1(m, \Delta_{n0}) = \left| \frac{2m}{\pi} \int_{\Delta_{n0}}^1 \sigma^{m-1} \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}} d\sigma \right|$$

et

$$\Sigma = \frac{m (G \Delta_{n0}^{m+1} - 2)}{m (G \Delta_{n0}^{m+1} - 2) + 4 (1 - \Delta_{n0})}$$

où

$$G = 2 \left[G^* + \left(\frac{2}{G_0} \right)^{m/(m+1)} \right]^{-(m+1)/m} ; \quad G_0 \approx 16.4 m^{0.37}$$

avec

$$G^* \approx \begin{cases} 2.722 \Delta_0^{*1.43} & \text{si } \Delta_0^* < 0.01 \\ 0.358 (\Delta_0^* - 0.005)^{0.86} & \text{si } \Delta_0^* < 0.01 \end{cases}$$

et

$$\Delta_0^* = \Delta_0 - \left(\frac{2}{G_0} \right)^{m/(m+1)} ; \quad \Delta_0 = \Delta_{n0}^m$$

La résolution numérique de ce système d'équations donne donc la valeur de Δ_{n0} . On peut ensuite calculer les valeurs de G , Σ , X_1 et Φ . Pour la LSBL on pose $\Delta_{n0} = 0$. On vérifie qu'on sera ramener à résoudre une équation de type $F(Od, m, \Sigma) = 0$ pour déterminer la valeur du paramètre Σ .

Profil de la couche limite :

Le profil de la couche limite (OLSBL) obéit à l'équation suivante :

$$\frac{\pi X_1}{2 m} |1 - x_+| = \left| \int_{\Delta_n}^1 \sigma^{m-1} \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}} d\sigma \right| \quad \text{avec } \Delta_n = \Delta^{1/m}$$

qui possède deux solutions analytiques, lorsque $m = p + 1$ et $m = p + 1/2$ où p est un entier. En annexe 1 on a déjà présenté des solutions analytiques pour quelques valeurs particulière de

m. Pour une valeur de m quelconque, on doit résoudre numériquement avec la valeur de X_1 calculée comme indiquée précédemment. Le profil de la LSBL correspond à $\Delta_{n0} = 0$.

Profil de la couche limite :

Pour l'OLSBL et la LSBL, le profil de vitesse peut être calculé à partir de l'équation suivante :

$$G(\eta_p) = 1 - \Phi \int_0^{\eta_p} \sigma^m \left(\frac{1 - \Sigma \sigma}{\Sigma} \right)^m d\sigma$$

Pour une valeur de Σ quelconque, il existe deux solutions analytiques : pour $m = p + 1$ et $m = p + 1/2$ où p est un entier. Pour une valeur de m quelconque, on doit résoudre numériquement cette équation avec la valeur de Φ calculée comme indiquée précédemment. Dans la limite $\Sigma = 0$ la solution est celle de la CTBL, on a :

$$G(\eta) = 1 - \left(1 - \frac{\eta}{\eta_\infty} \right)^{m+1} \quad \text{avec} \quad B = - \left(\frac{m+1}{\eta_\infty^{m+1}} \right)^{1/m}$$

D'autres propriétés :

Quelque soit la solution considérée l'expression qui donne le coefficient de traîné est la suivante :

$$C_D^s = 1 + C_{VD} \times Od^{-m/(m+1)} \quad \text{avec} \quad C_{VD} = \Gamma(m) \times \left[\frac{2}{\pi} \lambda(m, \Sigma) \right]^{1/(m+1)}$$

L'épaisseur de la couche limite au centre de la plaque est :

$$y_{+\infty} = \delta_{+m} \eta_\infty = C_{BL} \times Od^{-m/(m+1)} \quad \text{avec} \quad C_{BL} = \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^m \lambda(m, \Sigma) \right]^{1/(m+1)}$$

Le gradient de vitesse au centre de la plaque prend l'expression suivante :

$$u_{,y^+}^+ = C_{VG} \times Od^{m/(m+1)} \quad \text{avec} \quad C_{VG} = \left[\frac{2}{\pi} \lambda(m, \Sigma) \right]^{m/(m+1)}$$

L'expression de $\lambda(m, \Sigma)$ dans le cas de l'OLSBL et de LSBL est la suivante :

$$\lambda(m, \Sigma) = \Phi(m, \Sigma) \left(\frac{1 - \Sigma}{\Sigma} \right)^m$$

Dans le cas de l'OLSBL, on a :

$$\Gamma = \Gamma(m, \Delta_{n0}) = \frac{\tau(m, \Delta_{n0})}{X_1(m, \Delta_{n0})} \quad \text{avec} \quad \tau(m, \Delta_{n0}) = \left| \frac{2m}{\pi} \int_{\Delta_{n0}}^1 \sigma^{m-2} \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}} d\sigma \right|$$

Pour la LSBL ($\Delta_{n0} = 0$) l'expression de Γ se simplifie à :

$$\Gamma(m, \Delta_{n0}) = \Gamma(m) = \frac{2m}{2m-1}$$

$\lambda(m, \Sigma) = m + 1$ lorsque $\Sigma = 0$, c'est l'expression qui prend λ dans de la CTBL. Pour cette dernière couche, on a de plus $\Gamma = 1$.

Rappelons enfin que :

$$\Delta = \frac{\delta_+}{\delta_{+m}} \quad ; \quad \eta = \frac{y_+}{\delta_+} \quad ; \quad \eta_p = 1 - \frac{\eta}{\eta_\infty} \quad ; \quad u_+ = G(\eta)$$

et que :

$$(x_+, y_+, u_+) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{u}{V} \right)$$

Annexe 2 : Solutions analytique pour quelques valeurs particulières de m

Profil de la couche limite variable (LSBL et OLSBL) :

a) Cas où $m = p + 1$

- Pour $m = 1$ (modèle de Bingham)

$$\sqrt{\Delta_n(1-\Delta_n)} + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\Delta_n}{\Delta_n}}\right) = \frac{\pi X_1}{2} |1-x_+| \quad (71)$$

- Pour $m = 2$

$$\left(\Delta_n + \frac{3}{2}\right)\sqrt{\Delta_n(1-\Delta_n)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\Delta_n}{\Delta_n}}\right) = \frac{\pi X_1}{2} |1-x_+| \quad (72)$$

- Pour $m = 3$

$$\left(\frac{1}{3}\Delta_n^2 + \frac{5}{12}\Delta_n + \frac{5}{8}\right)\sqrt{\Delta_n(1-\Delta_n)} + \frac{5}{8}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\Delta_n}{\Delta_n}}\right) = \frac{\pi X_1}{6} |1-x_+| \quad (73)$$

- Pour $m = 4$

$$\left(\Delta_n^3 + \frac{7}{6}\Delta_n^2 + \frac{35}{24}\Delta_n + \frac{35}{16}\right)\sqrt{\Delta_n(1-\Delta_n)} + \frac{35}{16}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\Delta_n}{\Delta_n}}\right) = \frac{\pi X_1}{2} |1-x_+|$$

- Pour $m = 5$

$$\left(\frac{1}{5}\Delta_n^4 + \frac{9}{40}\Delta_n^3 + \frac{21}{80}\Delta_n^2 + \frac{21}{64}\Delta_n + \frac{63}{128}\right)\sqrt{\Delta_n(1-\Delta_n)} + \frac{63}{128}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\Delta_n}{\Delta_n}}\right) = \frac{\pi X_1}{10} |1-x_+|$$

b) Cas où $m = p + 1/2$

- Pour $m = 3/2$

$$6\sqrt{1-\Delta_n}\left[1 - \frac{1}{3}(1-\Delta_n)\right] = \pi X_1 |1-x_+| \quad (74)$$

- Pour $m = 5/2$

$$10\sqrt{1-\Delta_n}\left[1 - \frac{2}{3}(1-\Delta_n) + \frac{1}{5}(1-\Delta_n)^2\right] = \pi X_1 |1-x_+| \quad (75)$$

- Pour $m = 7/2$

$$14\sqrt{1-\Delta_n}\left[\Delta_n + \frac{3}{5}(1-\Delta_n)^2 - \frac{1}{7}(1-\Delta_n)^3\right] = \pi X_1 |1-x_+| \quad (76)$$

- Pour $m = 9/2$

$$18\sqrt{1-\Delta_n}\left[1 - \frac{4}{3}(1-\Delta_n) + \frac{6}{5}(1-\Delta_n)^2 - \frac{4}{7}(1-\Delta_n)^3 + \frac{1}{9}(1-\Delta_n)^4\right] = \pi X_1 |1-x_+|$$

Les valeurs de X_1 pour LSBL sont : $X_1(m=1) = 1$, $X_1(m=3/2) = 4/\pi$, $X_1(m=2) = 3/2$, $X_1(m=5/2) = 16/(3\pi)$, $X_1(m=3) = 15/8$, $X_1(m=7/2) = 32/(5\pi)$, $X_1(m=4) = 35/16$, $X_1(m=9/2) = 256/(37\pi)$ et $X_1(m=5) = 315/128$. Les valeurs de τ sont : $\tau(1) = 2$,

$X_1(m=3/2) = 4/\pi$, $\tau(2) = 2$, $\tau(5/2) = 20/(3\pi)$, $\tau(3) = 9/4$, $\tau(7/2) = 112/(15\pi)$,
 $\tau(4) = 5/2$, $\tau(9/2) = 288/(35\pi)$ et $\tau(5) = 175/64$.

Dans OLSBL, on a :

a) Cas où $m = p+1$

- Pour $m = 1$

$$X_1 = \frac{2}{\pi} \left\{ \sqrt{\Delta_{n0}(1-\Delta_{n0})} + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Delta_{n0}}{\Delta_{n0}}} \right) \right\} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Delta_{n0}}{\Delta_{n0}}} \right)$$

- Pour $m = 2$

$$X_1 = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\Delta_{n0} + \frac{3}{2} \right) \sqrt{\Delta_{n0}(1-\Delta_{n0})} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Delta_{n0}}{\Delta_{n0}}} \right) \right\}$$

et

$$\lambda = \frac{4}{\pi} \left\{ \sqrt{\Delta_{n0}(1-\Delta_{n0})} + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Delta_{n0}}{\Delta_{n0}}} \right) \right\}$$

- Pour $m = 3$

$$X_1 = \frac{6}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{3} \Delta_{n0}^2 + \frac{5}{12} \Delta_{n0} + \frac{5}{8} \right) \sqrt{\Delta_{n0}(1-\Delta_{n0})} + \frac{5}{8} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Delta_{n0}}{\Delta_{n0}}} \right) \right\}$$

et

$$\lambda = \frac{6}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2} \Delta_{n0} + \frac{3}{4} \right) \sqrt{\Delta_{n0}(1-\Delta_{n0})} + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Delta_{n0}}{\Delta_{n0}}} \right) \right\}$$

- Pour $m = 4$

$$X_1 = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\Delta_{n0}^3 + \frac{7}{6} \Delta_{n0}^2 + \frac{35}{24} \Delta_{n0} + \frac{35}{16} \right) \sqrt{\Delta_{n0}(1-\Delta_{n0})} + \frac{35}{16} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Delta_{n0}}{\Delta_{n0}}} \right) \right\}$$

et

$$\lambda = \frac{8}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{3} \Delta_{n0}^2 + \frac{5}{12} \Delta_{n0} + \frac{5}{8} \right) \sqrt{\Delta_{n0}(1-\Delta_{n0})} + \frac{5}{8} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Delta_{n0}}{\Delta_{n0}}} \right) \right\}$$

- Pour $m = 5$

$$X_1 = \frac{10}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{5} \Delta_{n0}^4 + \frac{9}{40} \Delta_{n0}^3 + \frac{21}{80} \Delta_{n0}^2 + \frac{21}{64} \Delta_{n0} + \frac{63}{128} \right) \sqrt{\Delta_{n0}(1-\Delta_{n0})} + \frac{63}{128} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Delta_{n0}}{\Delta_{n0}}} \right) \right\}$$

et

$$\lambda = \frac{10}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{4} \Delta_{n0}^3 + \frac{7}{24} \Delta_{n0}^2 + \frac{35}{96} \Delta_{n0} + \frac{35}{64} \right) \sqrt{\Delta_{n0}(1-\Delta_{n0})} + \frac{35}{64} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Delta_{n0}}{\Delta_{n0}}} \right) \right\}$$

b) Cas où $m = p+1/2$

- Pour $m = 3/2$

$$X_1 = \frac{6}{\pi} \sqrt{1-\Delta_{n0}} \left[1 - \frac{1}{3} (1-\Delta_{n0}) \right] \quad \text{et} \quad \tau = \frac{6}{\pi} \sqrt{1-\Delta_{n0}}$$

- Pour $m = 5/2$

$$X_1 = \frac{10}{\pi} \sqrt{1-\Delta_{n0}} \left[1 - \frac{2}{3} (1-\Delta_{n0}) + \frac{1}{5} (1-\Delta_{n0})^2 \right] \quad \text{et} \quad \tau = \frac{10}{\pi} \sqrt{1-\Delta_{n0}} \left[1 - \frac{1}{3} (1-\Delta_{n0}) \right]$$

- Pour $m = 7/2$

$$X_1 = \frac{14}{\pi} \sqrt{1 - \Delta_{n0}} \left[\Delta_{n0} + \frac{3}{5} (1 - \Delta_{n0})^2 - \frac{1}{7} (1 - \Delta_{n0})^3 \right]$$

et

$$\lambda = \frac{14}{\pi} \sqrt{1 - \Delta_{n0}} \left[1 - \frac{2}{3} (1 - \Delta_{n0}) + \frac{1}{5} (1 - \Delta_{n0})^2 \right]$$

- Pour $m = 9/2$

$$X_1 = \frac{18}{\pi} \sqrt{1 - \Delta_{n0}} \left[1 - \frac{4}{3} (1 - \Delta_{n0}) + \frac{6}{5} (1 - \Delta_{n0})^2 - \frac{4}{7} (1 - \Delta_{n0})^3 + \frac{1}{9} (1 - \Delta_{n0})^4 \right]$$

et

$$X_1 = \frac{18}{\pi} \sqrt{1 - \Delta_{n0}} \left[1 - (1 - \Delta_{n0}) + \frac{3}{5} (1 - \Delta_{n0})^2 - \frac{1}{7} (1 - \Delta_{n0})^3 \right]$$

Profils de vitesse de la couche limite variable (LSBL et OLSBL) :

a) Cas où $m = p + 1$

- Pour $m = 1$ (modèle de Bingham)

$$G(\eta_p) = 1 - \frac{\Phi}{6 \Sigma} \eta_p^2 (-2 \Sigma \eta_p + 3) \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{6 \Sigma}{3 - 2 \Sigma} \quad (77)$$

En intégrant $-G(\eta_p)$ par rapport à η_p , on obtient l'expression de la fonction F . Avec les conditions $F(\eta = \eta_\infty) = \eta_\infty(1 + \zeta)$ et $F(\eta = 0) = 0$, on déduit ensuite :

$$\Phi = -12 (1 + 3 \zeta) \quad \text{et} \quad \Sigma = \frac{6 \zeta + 2}{4 \zeta + 1} \quad ; \quad \frac{-1}{2} \leq \zeta \leq -\frac{1}{3} \quad (78)$$

on a aussi :

$$\lambda = \frac{6 (1 - \Sigma)}{3 - 2 \Sigma} \quad (79)$$

- Pour $m = 2$

$$G(\eta_p) = 1 - \frac{\Phi}{30 \Sigma^2} \eta_p^3 (6 \Sigma^2 \eta_p^2 - 15 \Sigma \eta_p + 10) \quad (80)$$

avec

$$\Phi = \frac{30 \Sigma^2}{10 - 15 \Sigma + 6 \Sigma^2} \quad \text{et} \quad \zeta = -\frac{1}{2} \left(\frac{5 - 6 \Sigma + 2 \Sigma^2}{10 - 15 \Sigma + 6 \Sigma^2} \right) \quad ; \quad \frac{-1}{2} \leq \zeta \leq -\frac{1}{4} \quad (81)$$

et

$$\lambda = \frac{30 (1 - \Sigma)^2}{10 - 15 \Sigma + 6 \Sigma^2} \quad (82)$$

- Pour $m = 3$

$$G(\eta_p) = 1 - \frac{\Phi}{140 \Sigma^3} \eta_p^4 (-20 \Sigma^3 \eta_p^3 + 70 \Sigma^2 \eta_p^2 - 84 \Sigma \eta_p + 35) \quad (83)$$

avec

$$\Phi = \frac{140 \Sigma^3}{35 - 84 \Sigma + 70 \Sigma^2 - 20 \Sigma^3} \quad \text{et} \quad \zeta = -\frac{1}{2} \left(\frac{14 - 28 \Sigma + 20 \Sigma^2 - 5 \Sigma^3}{35 - 84 \Sigma + 70 \Sigma^2 - 20 \Sigma^3} \right) \quad ; \quad \frac{-1}{2} \leq \zeta \leq -\frac{1}{5} \quad (84)$$

et

$$\lambda = \frac{140(1-\Sigma)^3}{35-84\Sigma+70\Sigma^2-20\Sigma^3} \quad (85)$$

- Pour $m = 4$

$$G(\eta_p) = 1 - \frac{\Phi}{160\Sigma^4} \eta_p^5 \left(70\Sigma^4 \eta_p^4 - 315\Sigma^3 \eta_p^3 + 540\Sigma^2 \eta_p^2 - 420\Sigma \eta_p + 126 \right)$$

avec

$$\Phi = \frac{630 \Sigma^4}{70 \Sigma^4 - 315 \Sigma^3 + 540 \Sigma^2 - 420 \Sigma + 126}$$

et

$$\zeta = -\frac{1}{2} \left(\frac{14\Sigma^4 - 70\Sigma^3 + 135\Sigma^2 - 120\Sigma + 42}{70\Sigma^4 - 315\Sigma^3 + 540\Sigma^2 - 420\Sigma + 126} \right); \quad -\frac{1}{2} \leq \zeta \leq -\frac{1}{6}$$

$$\lambda = \frac{630(1-\Sigma)^4}{70\Sigma^4 - 315\Sigma^3 + 540\Sigma^2 - 420\Sigma + 126}$$

- Pour $m = 5$

$$G(\eta_p) = 1 - \frac{\Phi}{2772\Sigma^5} \eta_p^6 \left(-252\Sigma^5 \eta_p^5 + 1386\Sigma^4 \eta_p^4 - 3080\Sigma^3 \eta_p^3 + 3465\Sigma^2 \eta_p^2 - 1980\Sigma \eta_p + 462 \right)$$

avec

$$\Phi = \frac{2772\Sigma^5}{-252\Sigma^5 + 1386\Sigma^4 - 3080\Sigma^3 + 3465\Sigma^2 - 1980\Sigma + 462}$$

et

$$\zeta = -\frac{1}{2} \left(\frac{42\Sigma^5 - 252\Sigma^4 + 616\Sigma^3 - 770\Sigma^2 + 495\Sigma - 132}{252\Sigma^5 - 1386\Sigma^4 + 3080\Sigma^3 - 3465\Sigma^2 + 1980\Sigma - 462} \right); \quad -\frac{1}{2} \leq \zeta \leq -\frac{1}{7}$$

$$\lambda = \frac{2772(1-\Sigma)^5}{-252\Sigma^5 + 1386\Sigma^4 - 3080\Sigma^3 + 3465\Sigma^2 - 1980\Sigma + 462}$$

b) Cas où $m = p + 1/2$

- Pour $m = 3/2$

$$G(\eta_p) = 1 - \frac{\Phi}{4\Sigma^4} \left[\sqrt{\Sigma \eta_p (1 - \Sigma \eta_p)} \left(-\Sigma^3 \eta_p^3 + \frac{3}{2} \Sigma^2 \eta_p^2 - \frac{1}{8} \Sigma \eta_p - \frac{3}{16} \right) - \frac{3}{16} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \Sigma \eta_p}{\Sigma \eta_p}} \right) \right]$$

avec

$$\Phi = \frac{4\Sigma^4}{\sqrt{\Sigma(1-\Sigma)} \left(-\Sigma^3 + \frac{3}{2} \Sigma^2 - \frac{1}{8} \Sigma - \frac{3}{16} \right) - \frac{3}{16} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Sigma}{\Sigma}} \right)}$$

et

$$\lambda = \frac{4\Sigma^{5/2} (1-\Sigma)^{3/2}}{\sqrt{\Sigma(1-\Sigma)} \left(-\Sigma^3 + \frac{3}{2} \Sigma^2 - \frac{1}{8} \Sigma - \frac{3}{16} \right) - \frac{3}{16} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Sigma}{\Sigma}} \right)}$$

- Pour $m = 5/2$

$$G(\eta_p) = 1 - \frac{\Phi}{2\Sigma^6} \left[\begin{array}{l} \sqrt{\Sigma\eta_p(1-\Sigma\eta_p)} \left(\frac{1}{3}\Sigma^5\eta_p^5 - \frac{5}{6}\Sigma^4\eta_p^4 + \frac{9}{16}\Sigma^3\eta_p^3 - \frac{1}{96}\Sigma^2\eta_p^2 - \frac{5}{384}\Sigma\eta_p - \frac{5}{256} \right) \\ - \frac{5}{256} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Sigma\eta_p}{\Sigma\eta_p}} \right) \end{array} \right]$$

avec

$$\Phi = \frac{2\Sigma^6}{\sqrt{\Sigma(1-\Sigma)} \left(\frac{1}{3}\Sigma^5 - \frac{5}{6}\Sigma^4 + \frac{9}{16}\Sigma^3 - \frac{1}{96}\Sigma^2 - \frac{5}{384}\Sigma - \frac{5}{256} \right) - \frac{5}{256} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Sigma}{\Sigma}} \right)}$$

et

$$\lambda = \frac{2\Sigma^{7/2}(1-\Sigma)^{5/2}}{\sqrt{\Sigma(1-\Sigma)} \left(\frac{1}{3}\Sigma^5 - \frac{5}{6}\Sigma^4 + \frac{9}{16}\Sigma^3 - \frac{1}{96}\Sigma^2 - \frac{5}{384}\Sigma - \frac{5}{256} \right) - \frac{5}{256} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Sigma}{\Sigma}} \right)}$$

• Pour $m = 7/2$

$$G(\eta_p) = 1 - \frac{\Phi}{8\Sigma^8} \left[\begin{array}{l} \sqrt{\Sigma\eta_p(1-\Sigma\eta_p)} \left(-\Sigma^7\eta_p^7 + \frac{7}{2}\Sigma^6\eta_p^6 - \frac{101}{24}\Sigma^5\eta_p^5 + \frac{85}{48}\Sigma^4\eta_p^4 - \frac{1}{128}\Sigma^3\eta_p^3 - \right. \\ \left. \frac{7}{768}\Sigma^2\eta_p^2 - \frac{35}{3072}\Sigma\eta_p - \frac{35}{2048} \right) \\ \frac{35}{2048} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Sigma\eta_p}{\Sigma\eta_p}} \right) \end{array} \right]$$

avec

$$\Phi = \frac{8\Sigma^8}{\sqrt{\Sigma(1-\Sigma)} \left(-\Sigma^7 + \frac{7}{2}\Sigma^6 - \frac{101}{24}\Sigma^5 + \frac{85}{48}\Sigma^4 - \frac{1}{128}\Sigma^3 - \frac{7}{768}\Sigma^2 - \frac{35}{3072}\Sigma - \frac{35}{2048} \right) - \frac{35}{2048} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Sigma}{\Sigma}} \right)}$$

et

$$\lambda = \frac{8\Sigma^{9/2}(1-\Sigma)^{7/2}}{\sqrt{\Sigma(1-\Sigma)} \left(-\Sigma^7 + \frac{7}{2}\Sigma^6 - \frac{101}{24}\Sigma^5 + \frac{85}{48}\Sigma^4 - \frac{1}{128}\Sigma^3 - \frac{7}{768}\Sigma^2 - \frac{35}{3072}\Sigma - \frac{35}{2048} \right) - \frac{35}{2048} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Sigma}{\Sigma}} \right)}$$

• Pour $m = 9/2$

$$G(\eta_p) = 1 - \frac{\Phi}{2\Sigma^{10}} \left[\begin{array}{l} \sqrt{\Sigma\eta_p(1-\Sigma\eta_p)} \left(\frac{1}{5}\Sigma^9\eta_p^9 - \frac{9}{10}\Sigma^8\eta_p^8 + \frac{247}{160}\Sigma^7\eta_p^7 - \frac{77}{64}\Sigma^6\eta_p^6 + \frac{93}{256}\Sigma^5\eta_p^5 - \right. \\ \left. \frac{1}{2560}\Sigma^4\eta_p^4 - \frac{9}{20480}\Sigma^3\eta_p^3 - \frac{21}{40960}\Sigma^2\eta_p^2 - \frac{21}{32768}\Sigma\eta_p - \frac{63}{65536} \right) \\ \frac{63}{65536} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Sigma\eta_p}{\Sigma\eta_p}} \right) \end{array} \right]$$

avec

$$\Phi = \frac{2\Sigma^{10}}{\sqrt{\Sigma(1-\Sigma)} \left(\frac{1}{5}\Sigma^9 - \frac{9}{10}\Sigma^8 + \frac{247}{160}\Sigma^7 - \frac{77}{64}\Sigma^6 + \frac{93}{256}\Sigma^5 - \frac{1}{2560}\Sigma^4 - \right. \\ \left. \frac{9}{20480}\Sigma^3 - \frac{21}{40960}\Sigma^2 - \frac{21}{32768}\Sigma - \frac{63}{65536} \right) - \frac{63}{65536} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Sigma}{\Sigma}} \right)}$$

et

$$\lambda = \frac{2\Sigma^{11/2} (1-\Sigma)^{9/2}}{\left[\sqrt{\Sigma(1-\Sigma)} \left(\frac{1}{5}\Sigma^9 - \frac{9}{10}\Sigma^8 + \frac{247}{160}\Sigma^7 - \frac{77}{64}\Sigma^6 + \frac{93}{256}\Sigma^5 - \frac{1}{2560}\Sigma^4 - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{9}{20480}\Sigma^3 - \frac{21}{40960}\Sigma^2 - \frac{21}{32768}\Sigma - \frac{63}{65536} \right) - \frac{63}{65536} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\Sigma}{\Sigma}} \right) \right]}$$